Corrigé des quatre exercices supplémentaires

Exercice 1. Soient donc X compact, $f_n : X \to Y$ une suite équicontinue d'applications, convergeant simplement vers f, et $\varepsilon > 0$.
Par équicontinuité, pour tout $a \in X$ il existe un ouvert O_a contenant a tel que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in O_a, d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon$, ce qui implique $\forall x \in O_a, d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ (par passage à la limite pour a et x fixés).
Le compact X est recouvert par ces ouverts O_a donc par un nombre fini d'entre eux : $\exists a_0, \ldots, a_k \in X,\ X = \cup_{i \leq k} O_{a_i}$.
Par convergence simple il existe N tel que $\forall n \geq N, \forall i \leq k, d(f_n(a_i), f(a_i)) \leq \varepsilon$
(il suffit pour cela de choisir $N \geq \max_{i \leq k} N_i$, où les N_i sont tels que
$\forall n \geq N_i, d(f_n(a_i), f(a_i)) \leq \varepsilon$).
Pour tout $x \in X$, soit $i \leq k$ tel que $x \in O_{a_i}$. Pour tout $n \geq N$ on a

$$d(f_n(x), f_n(a_i)) \leq \varepsilon, \qquad d(f(x), f(a_i)) \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad d(f_n(a_i), f(a_i)) \leq \varepsilon,$$

donc $d(f_n(x), f(x)) \leq 3\varepsilon$.
On a donc prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) \leq 3\varepsilon,$$

autrement dit $\lim_{n \to \infty} d_\infty(f_n, f) = 0$
(où d_∞ est définie par $d_\infty(g, f) = \sup_{x \in X} d(g(x), f(x))$)
i.e. $f_n \to f$ uniformément sur X.
Remarques :

- Puisque l'ensemble des f_n est équicontinu, chaque f_n est continue.
- Puisque de plus $f_n \to f$ uniformément, f est continue.
- Réciproquement (exercice) une suite de fonctions continues qui converge uniformément forme un ensemble équicontinu.

Exercice 2. Notons L la forme linéaire sur $\mathcal{C}([0,1])$ définie par $L(g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Par hypothèse, $\mathbf{R}[X] \subset \mathrm{Ker}L$. Or L est continue (pour la norme $\| \ \|_\infty$) puisqu'il existe une constante C telle que $\forall g \in \mathcal{C}([0,1]), |L(g)| \leq C\|g\|_\infty$ ($C = \|f\|_\infty$ convient, donc $|||L||| \leq \|f\|_\infty$) donc $\mathrm{Ker}L$ est fermé. D'autre part (théorème de Weierstrass) $\mathbf{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. Donc $\mathrm{Ker}L = \mathcal{C}([0,1])$, autrement dit $L = 0$, en particulier $0 = L(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$, donc $f = 0$.
Remarque : plus généralement (par la même méthode) toute mesure bornée μ sur $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \int t^n d\mu(t) = 0$ est nulle. En particulier toute fonction intégrable sur $[0,1]$ de moments nuls est (presque partout) nulle.

Exercice 3.
Première méthode. Soit $M = SP \in GL_n^+(\mathbf{R})$ avec S symétrique > 0 et $P \in O_n(\mathbf{R})$, ce qui implique $det(S) > 0$ donc $P \in SO_n(\mathbf{R})$. Pour construire dans $GL_n^+(\mathbf{R})$ un arc de I à M il suffit d'en construire un de I à S et un de I à P (et de faire le produit des deux). Il existe Q orthogonale telle que $Q^{-1}SQ = D$ diagonale (et > 0). Posons pour $t \in [0,1]$, $D(t) = tD + (1-t)I$ et $S(t) = QD(t)Q^{-1}$, alors $t \mapsto S(t)$ est un arc de I à S dans l'ensemble des matrices symétriques > 0.
Il existe R orthogonale telle que $R^{-1}PR = diag(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_k}, I_{n-2k})$ où $R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ désigne la matrice de rotation d'angle θ. Posons $R_i(t) = R_{t\theta_i}$ et $P(t) = Rdiag(R_1(t), \ldots, R_k(t), I_{n-2k})R^{-1}$, alors $t \mapsto P(t)$ est un arc de I à P dans $SO_n(\mathbf{R})$.
Seconde méthode. Précisons la décomposition suggérée. Soient $M \in GL_n^+(\mathbf{R})$ de déterminant $\mu > 0$, et D la dilatation $diag(I_{n-1}, \mu)$. Alors $MD^{-1} \in SL_n(\mathbf{R})$ est un produit de transvections, chacune de la forme $T = I + aE_{i,j}$ avec $i \neq j$ (où $E_{i,j}$ désigne la matrice comportant un 1 en ligne

i, colonne j, et des 0 partout ailleurs). Pour construire dans $GL_n^+(\mathbf{R})$ un arc de I à M il suffit (par produit, comme précédemment) de traiter les deux cas $M = D$ et $M = T$. Pour chacun des deux, $t \mapsto I + t(M - I)$ convient.

Exercice 4.

a) Soit $T \in \mathcal{K}(E, F)$ i.e. (cf exercice 142) (T linéaire et) $T(B(0,1))$ relativement compact. Alors $T(B(0,1))$ est borné, donc T est continue.

b) Si T est linéaire continue alors $T(B(0,1))$ est une partie bornée de $T(E)$. Si de plus $T(E)$ est de dimension finie on en déduit (théorème de Riesz) qu'il existe une partie K de F (en fait, de $T(E)$ mais peu importe ici) compacte et telle que $T(B(0,1)) \subset K$. Donc $\overline{T(B(0,1))}$ (fermé de K) est compact, i.e. $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

c) Supposons F complet. Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(E, F)}$, il s'agit de montrer que $T(B(0,1))$ est relativement compact dans F, ce qui (par complétude de F) équivaut à $T(B(0,1))$ précompact. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $S \in \mathcal{K}(E, F)$ tel que $|||T - S||| < \epsilon/2$ donc tel que $T(B(0,1)) \subset S(B(0,1)) + (\epsilon/2)B(0,1)$, et il existe (par précompacité de $S(B(0,1))$) un A fini tel que $S(B(0,1)) \subset \cup_{a \in A} B(a, \epsilon/2)$, d'où finalement $T(B(0,1)) \subset \cup_{a \in A} B(a, \epsilon)$ (avec A fini, dépendant de ϵ), cqfd.

d) Par construction T est une application linéaire de E dans E.
De plus $\forall x \in E, \forall t \in [0,1], |(Tx)(t)| \leq \|K\|_\infty \|x\|_\infty$ donc $\|T(x)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|x\|_\infty$, donc T est continue, de norme $\leq \|K\|_\infty$.

e) Il suffit même que K soit polynômiale par rapport à la première variable : si $K(t,u) = \sum_{0 \leq i \leq n} t^i k_i(u)$ (avec $k_0, \ldots, k_n$ continues sur $[0,1]$), alors $\forall x \in E, \forall t \in [0,1], (Tx)(t) = \sum_{0 \leq i \leq n} t^i \int_0^1 k_i(u)x(u)du$ donc l'image de T est incluse dans le sous-espace (de dimension $n+1$) des fonctions polynômiales de degré $\leq n$, donc T est de rang fini.
Comme on veut faire varier K (et donc le T qui lui est associé), notons T_K l'application T associée à K comme ci-dessus. On vient de voir que si $K \in \mathbf{C}[T, U]$, T_K est de rang fini donc (d'après d) et b)) compact. Par ailleurs d'après d), $|||T_K||| \leq \|K\|_\infty$, donc l'application (linéaire) $K \mapsto T_K$, de $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbf{C})$ dans $\mathcal{L}(E)$, est continue de norme ≤ 1. Donc cette application envoie l'adhérence de $\mathbf{C}[T, U]$ (i.e. par Stone-Weierstrass $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbf{C})$ tout entier) dans l'adhérence de $\mathcal{K}(E)$, i.e. dans $\mathcal{K}(E)$ d'après c) (qui s'applique bien puisqu'ici $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{C})$ est complet).