L3 Math Fonda, Topo, nov 2007, Programme des TD après le partiel

(Choix d'exercices des annales, plus quatre suppléments)

Complets : 124, (127), 128, 130

126 et 122 – sauf condition suffisante du b – traités en cours

Produit : 57, 58.a, 59

Compacts : 73, 75 (par 2 méthodes), 83 (sauf i et k), 85, 87, Suppléments 1 et 2

Connexes : 50 (en déduire que le cercle n'est homéomorphe à aucune partie de R), (105 ?), espaces de matrices (comme 83), 112, Supplément 3

e.v.n. : 132 (mais en le disant), 133 *(complétude de (E, d_∞) traitée en cours)*, (137.d), 138, 140 *(dont le a est traité en cours, et dans le cas de $\mathcal{L}(E)$ le c et le d)*, 142, Supplément 4

134 traité en cours

Suppléments

Exercice 1. Un ensemble F d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique Y est dit équicontinu en un point $a \in X$ si $\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall f \in F, \forall x \in V, d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$. Une suite d'applications $f_n : X \to Y$ est dite équicontinue si $\{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est équicontinu en tout point de X. Montrer que si X est compact, une suite équicontinue d'applications $f_n : X \to Y$ qui converge simplement converge uniformément.

Exercice 2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue et de moments nuls (i.e. $\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$). Montrer que $f = 0$.

Exercice 3. Montrer que le groupe $GL_n^+(\mathbf{R}) = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid det(M) > 0\}$ est connexe par arcs. Indication : on pourra utiliser que tout élément de $GL_n(\mathbf{R})$ est produit d'une matrique symétrique positive et d'une matrice orthogonale ("décomposition polaire"), ou bien que le groupe $GL_n(\mathbf{R})$ est engendré par les matrices de transvections et de dilatations.

Exercice 4. (extrait de Choquet) On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes (cf exercice 142 des annales) d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F.

a) Montrer que $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

b) Montrer que toute application linéaire continue de rang fini de E dans F est compacte.

c) Montrer (en utilisant la précompacité) que si F est complet, $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.

d) On suppose désormais $E = F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{C})$. On se donne $K : [0, 1]^2 \to \mathbf{C}$ continue et on pose, pour $x \in E$, $(Tx)(t) = \int_0^1 K(t, u)x(u)du$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et majorer sa norme.

e) Montrer que lorsque K est un polynôme, T est de rang fini. En déduire que pour tout K, l'application T est compacte.