U.P.S., Licence Math Fonda, Topologie, Corrigé du partiel de novembre 2006

I.1 $x \in \overline{A}$ ssi tout voisinage de x rencontre A, donc $x \in \overline{A}^c$ ssi il existe un voisinage de x inclus dans A^c, c'est-à-dire ssi $x \in \mathrm{Int}(A^c)$.

I.2 (i) équivaut à : pour toute famille dénombrable de fermés F_n tels que $\overline{F_n^c} = E$, $\overline{(\cup F_n)^c} = E$ donc (d'après I.1) à (ii).

I.3.i Pour toute partie B, $\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \cap (\mathrm{Int}(B))^c$ est un fermé (car intersection de deux fermés). D'autre part, puisque $\mathrm{Fr}(B) \subset \overline{B}$ et $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) \subset \mathrm{Fr}(B)$, on a

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) \subset \mathrm{Int}(\overline{B}) \cap \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Int}(\overline{B}) \setminus \mathrm{Int}(B),$$

ce qui dans le cas où B est fermé ($\overline{B} = B$) donne : $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) = \emptyset$.

I.3.ii Soit $x \in Y$. Comme $x \in E = \cup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in F_n$. Comme de plus x n'est intérieur à aucun F_k, on en déduit $x \in F_n \setminus \mathrm{Int}(F_n)$, donc $x \in \mathrm{Fr}(F_n)$.

I.3.iii Soit $G = \cup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Fr}(F_n)$. D'après I.3.ii, $\mathrm{Int}(Y) \subset \mathrm{Int}(G)$ et d'après I.3.i et I.2.ii, $\mathrm{Int}(G) = \emptyset$. Donc Y est d'intérieur vide c'est-à-dire (d'après I.1) son complémentaire $\cup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Int}(F_n)$ est dense dans E.

II.1 Ω_1 est dense dans E donc rencontre l'ouvert non vide O. Soit donc x appartenant à l'ouvert $\Omega_1 \cap O$. Il existe alors une boule fermée B_1 de centre x et de rayon $r \in]0, 1/2]$ incluse dans $\Omega_1 \cap O$.

II.2 $F_1 = B_1$ convient. Supposons $F_1, \ldots, F_{n-1}$ construits. En répétant le raisonnement du II.1 (en remplaçant Ω_1 par Ω_n, O par $\mathrm{Int}(F_{n-1})$, et $1/2$ par $1/(2n)$) on construit de même une boule fermée F_n d'intérieur non vide et de diamètre $\leq 1/n$ incluse dans $\Omega_n \cap \mathrm{Int}(F_{n-1})$.

II.3 Les F_n forment une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 donc (puisque E complet) leur intersection est un singleton $\{x\}$. On a $x \in F_1 \subset O$ et pour tout n, $x \in F_n \subset \Omega_n$, d'où $x \in O \cap Y$. Donc $Y \cap O$ est non vide. Et ce pour tout ouvert non vide O, ce qui prouve que Y est dense dans E. On a donc prouvé que tout espace complet E a la propriété de Baire I.2 i.

III.1 $F_{n,p} = \cap_{k\geq p}(f_p - f_k)^{-1}([-1/n, 1/n])$ est une intersection de fermés de E (car les $f_p - f_k : E \to \mathbf{R}$ sont continues et $[-1/n, 1/n]$ est un fermé de $\mathbf{R}$).

III.2 Fixons $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $x \in E$ il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall k \geq p, |f_k(x) - f(x)| \leq 1/2n$, ce qui implique $x \in F_{n,p}$.

III.3 D'après II, E a la propriété de Baire. Donc d'après I.3 (et III.1, III.2), U_n est dense dans E.

III.4 Les U_n sont ouverts (comme réunions d'ouverts) et denses dans E (d'après III.3) donc en réutilisant que E a la propriété de Baire (I.2.i), leur intersection A est dense dans E.

III.5 Soient (par définition de U_n) $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $F_{n,p}$ soit un voisinage de x_0 puis (par continuité de f_p pour ce p) W un voisinage de x_0 tel que $\forall x \in W, |f_p(x) - f_p(x_0)| \leq 1/n$. Pour tout $x \in F_{n,p}$ (en particulier pour $x = x_0$) on a (par passage à la limite quand $k \to \infty$) $|f_p(x) - f(x)| \leq 1/n$. Si de plus $x \in W$ on en déduit :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f(x_0)| \leq 3/n.$$

Le voisinage $V = F_{n,p} \cap W$ de x_0 convient donc.

III.6 Soit $x_0 \in A$. D'après III.5 (et par définition de A) on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V, |f(x) - f(x_0)| \leq 3/n$. Donc f est continue en x_0.