UNIVERSITE PAUL SABATIER 2006-2007

Licence de Mathématiques Fondamentales

CORRIGÉ DU PROBLÈME DE TOPOLOGIE

Première partie.

1) X n'est pas complet car la suite $x_n = 1/n$ est de Cauchy car elle converge, mais sa limite 0 n'appartient pas à X.

$X = \mathbb{N}$ est complet, en effet une suite de Cauchy dans $\mathbb{N}$ est constante donc convergente car, pour $\varepsilon < 1$, on a $|x_m - x_n| < 1$, donc $x_m = x_n$ pour tout n assez grand.

2) Une suite de Cauchy dans F est de Cauchy dans X, elle converge donc dans X vers un point x qui appartient à F car F est fermé.

Deuxième Partie.

1) a) La fonction $g(z) = f(z) + d(x,z)$ est continue comme somme de deux fonctions continues. L'ensemble $M(x) = g^{-1}(]-\infty, f(x)])$ est donc fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

Soit $y \in M(x)$ et $z \in M(y)$, de sorte que $f(y) + d(x,y) \leq f(x)$ et $f(z) + d(z,y) \leq f(y)$, donc ajoutant ces deux inégalités $f(z) + d(x,y) + d(y,z) \leq f(x)$. Comme

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

on obtient bien $f(z) + d(z,z) \leq f(x)$ soit $z \in M(x)$, donc $M(y) \subset M(x)$.

x est un d-point de f si et seulement si $X \setminus \{x\} \subset X \setminus M(x)$ soit $M(x) \subset \{x\}$, ce qui équivaut à $M(x) = \{x\}$ car $x \in M(x)$.

b) Par définition de x_{n+1}, on a $x_{n+1} \in M(x_n)$ donc $M(x_{n+1}) \subset M(x_n)$ d'après a). Par récurrence, il vient donc $M(x_{n+p}) \subset M(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Pour $y \in M(x_{n+p})$, on a $y \in M(x_{n-1})$ donc $\inf_{x \in M(x_{n-1})} f(x) \leq f(y)$. Comme $y \in M(x_n)$, il vient

$$f(y) + d(x_n, y) \leq f(x_n) \leq \inf_{x \in M(x_{n-1})} f(x) + \frac{1}{n} \leq f(y) + \frac{1}{n},$$

donc $d(x_n, y) \leq \frac{1}{n}$. Comme $x_{n+p} \in M(x_{n+p})$, on a donc $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, ce qui montre bien que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

c) On a $x_{n+p} \in M(x_{n+p}) \subset M(x_n)$. Passant à la limite sur $p \to \infty$, il vient $x \in M(x_n)$ car $M(x_n)$ est fermé, donc, utilisant a) $M(x) \subset M(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $M(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M(x_n)$. Soit alors $y \in M(x)$, de sorte que $y \in M(x_{n+p})$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, donc $d(x_n, y) \leq \frac{1}{n}$, d'où $y = x$ en faisant tendre n vers $+\infty$. On a donc que $M(x) = \{x\}$, donc x est un d-point de f d'après a).

2) Supposons que $x < z + |z - x|$ pour tout $z \neq x$. On a donc $x < z + x - z$ pour tout $z < x$, soit la contradiction $x < x$. Il manque l'hypothèse que f est minoré.

3) a) Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a $|d(x_m, x) - d(x_n, x)| \leq d(x_n, x_m)$, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il en est donc de même de la suite $(d(x, x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ qui converge donc dans $\mathbb{R}$.

b) On a $|2d(x_n, x) - 2d(x_n, z)| \leq 2d(x, z)$. Passant à la limite, il vient $|f(x) - f(z)| \leq 2d(x, z)$ pour tout $x, z \in X$. La fonction f est alors Lipschitzienne donc continue.

Pour tout $\varepsilon >$, on a $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ pour tout m, n assez grands. Passant à la limite sur m, il vient $2f(x_n) \leq \varepsilon$ pour tout n assez grand, d'où $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Soit x un d-point de f, on a donc $f(x) \leq f(x_n) + d(x, x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Passant à la limite sur n, il vient $f(x) \leq \dfrac{f(x)}{2}$ donc $f(x) \leq 0$, soit $f(x) = 0$ car $f(x) \geq 0$. On a donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, ce qui montre bien que X est complet.

4) a) On sait que $M(y)$ est fermé, dans X donc complet car X est complet. La fonction g étant minorée et continue, elle admet donc un d-point $x \in M(y)$.

b) Pour $z \in M(y) \setminus \{x\}$, on a $g(x) < g(z) + d(x,z)$ donc $f(x) < f(z) + d(x,z)$. Pour $z \in X \setminus M(y)$, on a $f(y) < f(z) + d(y,z)$ et $f(x) + d(x,y) \leq f(y)$ car $y \in M(x)$. Ajoutant ces deux inégalité, on obtient $f(x) < f(z) + d(y,z) - d(x,y) \leq f(z) + d(x,z)$. Il en résulte que $f(x) < f(z) + d(x,z)$ pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, donc x est un d-point de f.

c) On a vu dans a) et b) qu'un d-point de g est un d-point de f et il appartient à $M(y)$.

Troisième Partie.

1) D'après la question précédente, il existe un d-point y de f qui appartient à $M(x)$. Or l'hypothèse

$$\text{pour tout } x \in [f{>}0] \text{ il existe } y \neq x \text{ tel que } f(y) + d(x,y) \leq f(x)$$

veut exactement dire que tout $x \in [f{>}0]$ n'est pas un d-point de f. On a donc $y \in [f{\leq}0]$ donc $f(y) = 0$ car $f(y) \geq 0$. De plus, on a $y \in M(x)$, donc $f(y) + d(x,y) = d(x,y) \leq f(x)$, d'où le résultat.

2) a) La fonction f est continue sur X comme composée de la fonction continue $(x,z) \mapsto d(x,y)$ avec l'application continue $x \mapsto (x, T(x))$ (cette dernière application est continue car ses deux composantes le sont).

b) Soit $x \in [f{>}0]$, ce qui implique que $y \neq x$ où $y = T(x)$. On a alors

$$f(y) = d(y, T(y)) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x,y),$$

d'où $f(y) - kd(x,y) + d(x,y) \leq d(x,y) = f(x)$, soit $f(y) + (1-k)d(x,y) \leq f(x)$ et $y \neq x$. D'après la question précédente appliquée avec la distance $\tilde{d} = (1-k)d$, il existe, pour tout $x \in X$, un $y \in M(x)$ tel que $f(y) = 0$, donc $T(y) = y$, et $(1-k)d(x,y) \leq d(x, T(x))$. Le point fixe est alors unique par un raisonnement classique.

3) Deuxième application.

a) Soit $T : X \longrightarrow X$ une contraction stricte, et soit $x \in X$ tel que $T(x) \neq x$. Posant $z = T(x)$, on a $z \in X \setminus \{x\}$, $d(x,z) + d(z, T(x)) = d(x, T(x))$, et $d(T(z), T(x)) \leq kd(x,z)$, donc T est bien une contraction directionnelle.

Soit alors $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T(x,y) \neq (x,y)$. Remarquons que $\mathrm{Im}\,(A - I) = \mathbb{R}(1,2)$ et que $A(1,2) = \dfrac{5}{6}(1,2)$, de sorte que

$$\|A(u,v)\| = \frac{5}{6}\|(u,v)\| \text{ pour tout } (u,v) \in \mathrm{Im}\,(A - I).$$