Posant $(z,w) = A(x,y)$, on a $d((x,y),(z,w)) + d((z,w),A(x,y)) = d((x,y),A(x,y))$, et

$$\|A(z,w) - A(x,y)\| = \|A(A(x,y) - (x,y))\| = \frac{5}{6}\|(z,w) - (x,y)\|,$$

ce qui montre que T est une contraction directionnelle avec $k = \frac{5}{6} \in [0,1[$.

On a alors $T(x,y) = (x,y)$ si et seulement si $3x = 2y$. Comme le point fixe n'est pas unique, T n'est donc pas une contraction stricte.

b) f est continue car la fonction d est continue sur $X \times X$, ainsi donc que sa restriction à $\mathcal{G}_T$.

c) Soit $(x,y) \in [f{>}0]$ et soit $z \in X \setminus \{x\}$ vérifiant $d(x,T(x)) = d(x,z) + d(z,T(x))$ et $d(T(x),T(z)) \leq kd(x,y)$. Posant $y = T(x)$, on a

$$d(z,T(x)) \geq d(z,T(z)) - d(T(x),T(z)) \geq d(z,T(z)) - kd(x,z),$$

comme $d(x,T(x)) = d(x,z) + d(z,T(x))$, il vient donc

$$d(x,T(x)) - d(x,z) \geq d(z,T(z)) - kd(x,z).$$

Posant $w = T(z)$, on obtient donc

$$f(x,y) \geq (1-k)d(x,z) + f(z,w).$$

Par ailleurs, on a $d(x,z) \geq k^{-1}d(T(x),T(z)) = k^{-1}d(y,w)$, donc

$$f(x,y) \geq (1-k)d(x,z) + f(z,w) \geq (1-k)k^{-1}d(y,w) + f(z,w)$$

donc $(1-k)d((x,y),(z,w)) + f(z,w) \leq f(x,y)$ et $(z,w) \neq (x,y)$ car $x \neq z$. D'après **1)** appliqué à la distance $\tilde{d} = (1-k)d$, on obtient que pour tout $x \in X$, il existe $(z,w) \in \mathcal{G}_T$ tel que, posant $y = T(x)$, on a $(z,w) \in M_{(x,y)}$ et $f(z,w) = 0$. On a donc $w = T(z) = z$ et

$$(1-k)d((x,y),(z,w)) \leq d(x,T(x)),$$

donc en particulier $(1-k)d(x,z) \leq d(x,T(x))$.

Quatrième Partie.

1) (i)$\Longrightarrow$(ii). Soit $x \notin [f{\leq}c]$, d'où $c < f(x) \leq \sup_{\eta>0} \inf_{z\in B_\eta(x)} f(z)$. Par définition de la borne supérieure, il existe $\eta > 0$ tel que $c < \inf_{z\in B_\eta(x)} f(z)$, donc $c < f(z)$ pour tout $z \in B_\eta(x)$, d'où $B_\eta(x) \subset X \setminus [f{\leq}c]$. On obtient donc que $X \setminus [f{\leq}c]$ est ouvert, donc $[f{\leq}c]$ est fermé.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Soit $\varepsilon > 0$. Posant $c = f(x) - \varepsilon$, on a $c < f(x)$ donc $x \in X \setminus [f{\leq}c]$. Comme ce dernier ensemble est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B_\eta(x) \subset X \setminus [f{\leq}c]$, d'où $f(z) > c = f(x) - \varepsilon$ pour tout $x \in B_\eta(x)$.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $f(z) > f(x) - \varepsilon$ pour tout $z \in B_\eta(x)$. Il en résulte que

$$f(x) - \varepsilon \leq \inf_{z\in B_\eta(x)} f(z) \leq \sup_{\eta>0} \inf_{z\in B_\eta(x)} = \liminf_{z\to x} f(z).$$

Faisant tendre ε vers 0, on a bien $f(x) \leq \liminf_{z\to x} f(z)$.

2) On a

$$[\chi_I{\leq}c] = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } c \geq 1 \\ \mathbb{R} \setminus I & \text{si } 0 < c < 1 \\ \emptyset & \text{si } c < 1 \end{cases},$$

dans tous les cas $[\chi_I{\leq}c]$ est fermé, donc χ_I est semicontinue inférieurement. Supposant χ_J semicontinue inférieurement, on a donc $\mathbb{R} \setminus J$ fermé, donc J est ouvert.

Posons $f = \chi_I$ où I est un intervalle fermé. Pour $c \in]0,1[$, on a $[\chi_I{\leq}c] = \mathbb{R} \setminus I$ et $\mathbb{R} \setminus I$ n'est pas fermé, donc f n'est pas semicontinue inférieurement.

3) Le seul endroit où la continuité de f intervient est pour montrer que $M(x)$ est fermé. Posant $g(z) = f(z) + d(x,z)$ et admettant que la somme de deux fonctions semicontinues inférieurement est semicontinue inférieurement, on obtient que $M(x)$ est fermé sous la seule hypothèse que *f est semicontinue inférieurement.*