Licence de Mathématiques Fondamentales

PROBLÈME DE TOPOLOGIE

Dans toute la suite (X, d) désigne un espace métrique. On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X a une limite dans X. Une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{(m,n)\to(+\infty,+\infty)} d(x_n, x_m) = 0$; autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout m, $n \geq n_0$. Étant donnée une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on rappelle que $\inf_{x\in X} f(x)$ n'a aucune raison d'être atteint. Par contre, pour tout $c \in \mathbb{R}$ tel que $\inf_{x\in X} f(x) < c$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) < c$.

Première partie.

1) L'ensemble $X =]0, 1[$ muni de la distance associée à la valeur absolue de $\mathbb{R}$ est-il complet ? Même question avec $X = \mathbb{N}$ muni de la distance associée à la valeur absolue de $\mathbb{R}$.

2) Soit F un fermé d'un espace complet (X, d), montrez que (F, d) est complet.

Deuxième Partie.

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un espace métrique (X, d). On dit que $x \in X$ est un *d-point* de f si

$$f(x) < f(z) + d(z, x) \text{ pour tout } z \in X \setminus \{x\}.$$

1) On suppose que (X, d) est complet et que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et minorée. On se propose de montrer que f admet un d-point.

a) Pour $x \in X$, on pose $M(x) = \{z \in X : f(\cancel{x}\,z) + d(x, z) \leq f(\cancel{z}\,x)\}$. Montrer que $M(x)$ est fermé, que $M(y) \subset M(x)$ si $y \in M(x)$ et que x est un d-point de f si et seulement si $M(x) = \{x\}$.

b) Soit $x_0 \in X$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ la (?) suite définie par récurrence par

$$x_n \in M(x_{n-1}) \text{ et } f(x_n) \leq \inf_{x\in M(x_{n-1})} f(x) + \frac{1}{n}.$$

Montrez que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$M(x_{n+p}) \subset M(x_n), \tag{1}$$

et que, pour tout $y \in M(x_{n+p})$, on a

$$f(y) + d(x_n, y) \leq f(x_n) \leq f(y) + \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

c) Soit $x \in X$ la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x \in M(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser (1)), en déduire que $M(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M(x_n)$. Soit alors $y \in M(x)$, montrer que $y = x$. En déduire que x est un d-point de f.