2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. La fonction f possède-t-elle un d-point. Quelle est l'hypothèse de la question **1)** qui n'est pas vérifiée ?

3) Soit (X, d) un espace métrique tel que toute fonction continue minorée $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ possède un d-point. On se propose de montrer que (X, d) est complet.

a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy. Montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(d(x, x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On pose alors $f(x) = 2\lim_{n\to\infty} d(x, x_n)$.

b) Montrer que pour tout $x, z \in X$, on a $|f(x) - f(z)| \leq 2d(x, z)$, en déduire que f est continue. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Soit alors x un d-point de f. En utilisant le fait que $f(x) \leq f(x_n) + d(x, x_n)$, montrer que $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$, et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

4) Soit $y \in X$, soit g la restriction de f à $M(y)$.

a) Montrer d'après ce qui précède que g admet un d-point $x \in M(y)$.

b) Montrer que x est un d-point de f (on pourra considérer $z \in X \setminus M(y)$).

c) En déduire que pour tout $y \in X$, il existe un d-point de f qui appartient à $M(y)$.

Troisième Partie.

On considère une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue définie sur un espace métrique complet (X, d). On note $[f{\leq}0] = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$ et $[f{>}0] = X \setminus [f{\leq}0] = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

1) On suppose que

$$\text{pour tout } x \in [f{>}0] \text{ il existe } y \neq x \text{ tel que } f(y) + d(x, y) \leq f(x).$$

Montrer que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $f(y) = 0$ et $d(x, y) \leq f(x)$ (on pourra montrer qu'un d-point y de f qui appartient à $M(x)$ dont l'existence est garantie par la question précédente ne peut appartenir à $[f{>}0]$).

2) Première application. Soit $T : X \longrightarrow X$ une application contractante définie sur un espace métrique complet (c'est à dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $d(T(x), T(z)) \leq kd(x, z)$ pour tout $x, z \in X$). On pose $f(x) = d(x, T(x))$.

a) Montrer que f est continue sur X.

b) Soit $x \in [f{>}0]$ et $y = T(x)$. Montrer que $y \neq x$ et $f(y) + (1-k)f(x) \leq f(x)$. Déduire de la question précédente que pour tout $x \in X$, il existe un $y \in \cancel{T(y)}$ tel que $(1-k)d(x, y) \leq d(x, T(x))$. Montrer que T possède alors un unique point fixe. X

3) Deuxième application. Soit X un espace métrique complet et soit $T : X \longrightarrow X$. On note $\mathcal{G}_T = \{(x, T(x)) : x \in X\} \subset X \times X$ le graphe de T et on dit que T est une contraction directionnelle de module $k \in [0, 1[$ si $\mathcal{G}_T$ est fermé dans $X \times X$ et si, pour tout $x \in X$ tel que $T(x) \neq x$, il existe $z \in X \setminus \{x\}$ tel que

$$d(x, T(x)) = d(x, z) + d(z, T(x)) \text{ et } d(T(x), T(z)) \leq kd(x, z). \tag{2}$$

a) Montrer qu'une contraction stricte $T : X \longrightarrow X$ est une contraction directionnelle. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}, x + \frac{y}{3}\right),$$

montrer que T est une contraction directionnelle. Déterminer $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y) = (x, y)\}$ et en déduire que T n'est pas une contraction stricte.