b) Soit $f : \mathcal{G}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{G}_T$. Montrer que f est continue.

c) Soit $(x,y) \in [f{>}0]$ et soit $z \in X \setminus \{x\}$ vérifiant (2). En remarquant que

$$y = T(x) \text{ et } d(z,T(x)) \geq d(z,T(z)) - d(T(x),T(z)),$$

montrer que l'on a, posant $w = T(z)$:

$$f(x,y) \geq (1-k)d(x,z) + f(z,w).$$

On munit $X \times X$ de la distance $d((x,y),(z,w)) = \max(d(x,z), k^{-1}d(y,w))$ pour laquelle $\mathcal{G}_T$ est complet (on pourra le démontrer). Montrer que

$$f(x,y) \geq (1-k)d((x,y),(z,w)) + f(z,w).$$

Déduire de **1)** que pour tout $x \in X$, il existe un $y \in X$ tel que

$$T(y) = y \text{ et } (1-k)d(x,y) \leq d(x,T(x)).$$

Quatrième Partie.

Soit X un espace métrique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\liminf_{z \to x} f(z) = \sup_{\eta > 0} \inf_{z \in B_\eta(x)} f(z),$$

où $B_\eta(x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon η.

1) Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x) \leq \liminf_{z \to x} f(z)$ pour tout $x \in X$;

(ii) $[f{\leq}c]$ est fermé pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(iii) pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(z) > f(x) - \varepsilon$ pour tout $z \in B_\eta(x)$.

On dit que f est semicontinue inférieurement quand ces propriétés équivalentes sont satisfaites.

2) Soit I un intervalle ouvert et

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sa fonction caractéristique. Montrer que χ_I est semicontinue inférieurement et que si J est un intervalle tel que χ_J est semicontinue inférieurement, alors J est ouvert. Donner des exemples simples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas semicontinues inférieurement

3) Montrer que le résultat de la question **1)** de la deuxième partie reste vrai si l'on suppose seulement que f est semicontinue inférieurement.