2005-2006

LICENCE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Devoir n°1

à rendre dans la semaine du 14 novembre

Exercice. Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leurs topologies usuelles et leurs sous-ensembles des topologies induites respectives.

1. On pose $\Omega_0 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ uv < 0\}$, $\Omega_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ uv > 1\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $O_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{1}{n+1} < uv < \frac{1}{n}\}$ et $H_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ uv = \frac{1}{n}\}$.
Montrer que

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n et H_1 sont homéomorphes.

(b) Ω_0, Ω_1 et O_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^2$ et leur réunion est le complémentaire de l'ensemble $E = H_\infty \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_n$, où $H_\infty = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ uv = 0\}$.

(c) L'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_n$ est égale à E.

2. Soit $A = \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[$; on définit pour tout $r \in A$: $H_r = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ uv = \frac{1}{r}\}$. Montrer que $\bigcup_{r\in A} H_r$ est dense dans $F := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 \leq uv \leq 1\}$.

3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ yz = \frac{1}{n}\}$.

(a) Soit $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x = 1\}$. Montrer que pour tout $n > 0$, $\Gamma_n \cap \mathcal{P}$ est homéomorphe à H_1.

(b) Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}^3$ de $\bigcup_{n\geq 1} \Gamma_n$.

Problème. Soit G un groupe (la loi interne notée ., le symétrique d'un élément x noté x^{-1}). On dit que G est un groupe topologique s'il est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec la structure de groupe de G i.e. telle que les applications $(x,y) \mapsto x.y$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues respectivement sur $G \times G$ muni de la topologie produit $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ et sur G muni de la topologie $\mathcal{T}$.

1. Les espaces $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ sont munis de leurs topologies usuelles. Vérifier que le groupe additif $\mathbb{R}^n$, le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient, le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n^2}$ sont des groupes topologiques.

2. Soit G un groupe topologique. Vérifier que :

(a) – si ω est un ouvert de G et A une partie de G, les sous-ensembles $\omega.A$ et $A.\omega$ sont des ouverts de G.
– l'ensemble des voisinages W de l'élément neutre e qui sont symétriques (i.e. $W = W^{-1}$) forme un s.f.v. de e. Donner un s.f.v. d'un point x quelconque de G.
– G est séparé si et seulement si le singleton $\{e\}$ est fermé.

(b) l'adhérence d'un sous-groupe (resp. d'un sous-groupe distingué) de G est un sous-groupe (resp. un sous-groupe distingué) de G.

(c) tout sous-groupe H ouvert est fermé; tout sous-groupe H localement fermé (i.e. dont tout point possède un voisinage V tel que $V \cap H$ soit fermé dans V) est fermé (*on pourra remarquer que e possède un voisinage ouvert symétrique W tel que $H \cap W$ soit fermé dans W*).
En déduire que si G est connexe, il est engendré par chaque voisinage de e. (RAPPEL : *G est connexe ssi les seules parties de G ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et G*).