3. Soit $(G_j)_{j\in J}$ une famille non vide de groupes topologiques. Vérifier - au moins lorsque J est fini - que la topologie produit sur $G := \prod_{j\in J} G_j$ est compatible avec la structure de groupe de G. On note pour tout j, e_j le neutre de G_j. Montrer que le sous-groupe (distingué) engendré par la réunion des $G_k \times \prod_{j\in J, j\neq k} \{e_j\}$, où k parcourt J, est dense dans G.

4. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe distingué de G. Vérifier que la topologie quotient sur G/H est compatible avec la structure de groupe de G/H.
On suppose G métrisable, muni d'une distance d invariante à droite (i.e. pour tous x, y, z élements de G, $d(xz, yz) = d(x, y)$) (ou invariante à gauche) définissant la topologie de G. (on admet l'existence d'une telle distance).

(a) Montrer que si G est complet pour une distance invariante à gauche définissant la topologie de G, il est complet pour toute distance invariante à gauche ou à droite définissant la topologie de G. On dit alors que G est complet.

(b) On suppose de plus H fermé et G complet. On pose pour $x, y \in G$, $\delta(xH, yH) := dist_{(G,d)}(xH, yH)$. Montrer que δ définit une distance sur G/H, dont la topologie associée est la topologie quotient, et que $(G/H, \delta)$ est complet.

5. (a) Vérifier que si la topologie d'un groupe métrisable G peut être définie par une distance invariante à la fois à droite et à gauche (NOTE : *c'est le cas par exemple si G est compact*), alors tout voisinage V du neutre e de G contient un voisinage W tel que pour tout x de G l'on ait $xWx^{-1} \subset V$.

(b) Montrer que le groupe topologique $GL_2(\mathbb{R})$ (cf. question 1.) est localement compact, non compact et que sa topologie ne peut pas être définie par une distance invariante à la fois à gauche et à droite.

6. Soit G un groupe topologique métrisable et K une partie compacte de G stable pour la loi interne de G. Montrer que pour tout x de K, on a $xK = K$. (*On pourra considérer une valeur d'adhérence a de la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ et comparer aK et $\cap_{n\geq 1} x^n K$*).
En déduire que K est un sous-groupe de G.