Examen de Janvier 1999

Aucun document n'est autorisé.

Les problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barême suivant n'est qu'indicatif : I = 3 points, II = 3 points, III = 9 points, IV = 5 points.

Toutes les réponses devront être justifiées. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction.

I. (Question de cours). Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides telle que le diamètre de F_n tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer que l'intersection des F_n n'est pas vide.

II. Soit X un espace métrique connexe, et $f : X \to \mathbf{C}$ continue. On suppose $f(x) \notin \mathbf{R}$ pour tout $x \in X$.

1) Montrer que le signe de la partie imaginaire de $f(x)$ ne dépend pas de x.

2) On suppose que pour tout entier $n \geq 1$ il existe $x \in X$ tel que la partie imaginaire de $f(x)$ soit $\frac{1}{n}$. Montrer que X n'est pas compact.

III. Etant donné un espace métrique (X, d), on note B l'ensemble des applications bornées de X dans X, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Pour $\lambda \in]0, +\infty[$, on note F_λ l'ensemble des $f \in B$ telles que $d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$ pour tous x, y dans X.

1) Montrer qu'il existe une unique distance d sur $\mathbf{N}$ telle que $d(i, j) = 1$ si $i \neq j$. L'espace $(\mathbf{N}, d)$ est-il séparé ? borné ? complet ? discret ? connexe ? compact ? (justifier les réponses).

On munit $\mathbf{N}$ de la distance d. Montrer $F_\lambda = \emptyset$ pour $\lambda \neq 1$. Montrer que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ appartient à F_1 si et seulement si f est injective. Donner un exemple de $f \in F_1$ non surjective.