On suppose désormais que (X, d) est un espace métrique complet quelconque possédant au moins deux points.

2) Montrer que toute $f \in F_\lambda$ est injective. Si $F_\lambda \neq \emptyset$, montrer que X est borné, et que $\lambda \leq 1$. Si F_λ contient une f surjective, montrer $\lambda = 1$.

3) Montrer que F_λ est fermé dans B. Soit $J = [a, b] \subset]0, 1]$. Montrer que $\bigcup_{\lambda \in J} F_\lambda$ est fermé dans B.

4) Soit $f \in F_\lambda$ avec $\lambda < 1$. Montrer que la suite $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n termes) converge uniformément vers une application constante. En déduire que $\bigcup_{\lambda \in]0,1]} F_\lambda$ n'est pas fermé dans B.

5) Soit G la partie de B formée des f qui appartiennent à F_1 et sont surjectives. Si $f \in \overline{G}$, montrer que l'image de f est dense dans X. En déduire que G est fermé dans B si X est compact.

6) On se propose de montrer que G est fermé dans B même si X n'est pas compact. Soit $f \in \overline{G}$. Montrer qu'il existe une unique application $h : f(X) \to X$ telle que $f \circ h = id_{f(X)}$. Montrer que h est uniformément continue, puis que f est surjective (on pourra utiliser un théorème de prolongement).

IV. Soit $E = \mathbf{R}[x]$ l'espace des polynomes réels à une variable.

1) Vérifier que pour tout $a \in \mathbf{R}$ la fonction

$$N_a(P) = |P(a)| + \sup_{x \in [0,1]} |P'(x)|$$

est une norme sur E. La fonction $N : E \to \mathbf{R}$ qui à P associe $N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P'(x)|$ est-elle une norme ?

2) Si a et b appartiennent à $[0, 1]$, montrer que N_a et N_b sont équivalentes (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

3) Montrer que N_0 et N_2 ne sont pas équivalentes.

4) Montrer que l'application $\varphi : (E, N_0) \to (E, N_0)$ qui à P associe le polynome $Q(x) = \int_0^x P(t)\, dt$ est linéaire continue, et déterminer sa norme.