LICENCE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Topologie - Partiel du 24 Novembre 2005

Durée 2 heures

Exercice 1 : 1) Déterminer l'adhérence, l'intérieur, la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ euclidien :

$A = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $B = \{(1, \frac{1}{n+1}),\ n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{3} + y^2 \geq 1\}$.

Dire pour chacune de ces parties de $\mathbb{R}^2$ si elle est ou non compacte, complète.

2) On note par E l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme. Montrer que :

$\Omega = \{f \in E, \mathcal{R}e\, f(t) < 0, \forall t \in [0,1]\}$ est ouvert dans E,

$\Gamma = \{f \in E, f(t) \in i\mathbb{R}, \forall t \in [0,1]\}$ est une partie complète de E.

Exercice 2. Soit K un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^N$ euclidien, $N \geq 1$ et $f : K \longrightarrow K$ une application 1-lipschitzienne.

(RAPPELS : *une partie A de $\mathbb{R}^N$ est convexe si pour tous x, y appartenant à A, le segment $\{tx + (1-t)y,\ 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans A*

f est 1-lipschitzienne si elle vérifie : $d(f(x), f(x')) \leq d(x,x')$ pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^N$, où d est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.

On se propose de démontrer que f admet un point fixe.

1) Montrer que $f_n(x) = \frac{1}{n}f(a) + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ définit une application qui admet un unique point fixe $x_n \in K$. (a est un point fixé dans K)

2) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur K.

3) En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 3. Soient X et Y deux espaces topologiques non vides, Y étant supposé séparé, et f une applicaion de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y. Pour $A \subset X$, on note $F(A) = \cup_{x \in A} f(x)$.

1) a) Montrer que les deux conditions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) Pour tout x de X et tout ouvert Ω de Y tel que $f(x) \subset \Omega$, il existe un voisinage V de x tel que $F(V) \subset \Omega$.

(ii) Pour tout ouvert Ω de Y, l'ensemble $F^{-1}(\Omega) := \{x \in X,\ f(x) \subset \Omega\}$ est ouvert dans X.

b) Dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, donner deux exemples d'applications f non constantes vérifiant la condition (i).

ON SUPPOSE DANS TOUTE LA SUITE DE L'EXERCICE QUE LA CONDITION (i) EST SATISFAITE ET QUE POUR TOUT x DE X, $f(x)$ EST UNE PARTIE COMPACTE DE Y.

2) soit K une partie compacte de X. Montrer que $F(K)$ est une partie compacte de Y.

3) Dans cette question $X = Y$ est un espace métrique compact.

a) Vérifier que si K est une partie compacte de X et $a \in X \setminus K$, il existe un voisinage ouvert de K ne contenant pas a.

b) (BONUS) Montrer que $G = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} F^n(X)$ est un compact non vide. (*où* $F^n(X) = F(F^{n-1}(X)), \forall n \geq 2$) et que l'on a $F(G) \subset G$.

Prouver enfin l'égalité $F(G) = G$ (*on pourra utiliser 4) a)*).