EXAMEN DE L1 (DURÉE 3 HEURES)

7 Septembre 2001

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I.

On note $E = \mathbb{R}(X)$ l'espace vectoriel des polynômes réels.

1) Montrer qu'on définit une norme sur E en posant pour tout polynôme $P \in E$:

$$\|P\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!} \qquad \text{(par convention } 0! = 1\text{)}$$

2) On considère l'application linéaire $D : E \to E$ définie par $D(P) = P'$, où P' est le polynôme dérivée de P.

a) Pour tout entier $n \geq 0$, on note E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Justifier que pour tout entier $n \geq 0$ la restriction de D à E_n est continue.

b) Démontrer que D n'est pas continue sur E.

3) On pose $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(0) = 1\}$. Montrer que $A = \ker(D) \cup H$ est un sous-ensemble connexe de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|\ \|)$.

Exercice II.

Soit X un espace topologique compact et (Y, d) un espace métrique.

Etant donnée une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues de X dans Y, on suppose qu'il existe une application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout point $x \in X$ la suite $\{d(f_n(x), f(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$: $A_n(\varepsilon) = \{x \in X \text{ tel que } d(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon\}$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$A_{n+1}(\varepsilon) \subset A_n(\varepsilon) = \overline{A_n(\varepsilon)}.$$

2) Démontrer que l'intersection des $A_n(\varepsilon)$ est vide: $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n(\varepsilon) = \emptyset$.

3) Démontrer que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

T.S.V.P.