Exercice III.

Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel réel normé de **dimension finie**. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue ayant la propriété suivante:

$\forall B > 0 \,, \exists A > 0$ tel que $\|x\| > A \Rightarrow f(x) > B$.

Montrer que f possède un minimum absolu dans E.

(On pourra choisir $B > f(0_E)$.)

Exercice IV.

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\| = \sup\{|f(x)| \, ; x \in [0,1]\}$.

Pour $r > 0$, on pose $B'_r = \{f \in E \, ; \|f\| \leq r\}$. On se donne une fonction $g \in E$ telle que $\|g\| < 1/4$ et une fonction continue $h : [0,1] \to [0,1]$.

1) Soit $\Phi : E \to E$ l'application définie par $\Phi(f) = \frac{1}{2}(g + f^2 - f \circ h)$

a) Démontrer qu'il existe $r \in]0, 1/2[$ tel que $r(1-r) \geq \|g\|$.

b) Démontrer qu'il existe $r \in]0, 1/2[$ tel que $\Phi(B'_r) \subset B'_r$.

c) Démontrer que Φ est lipschitzienne sur B'_r de constante $(2r+1)/2$.

2) On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue $f \in E$:

$$2f(x) - [f(x)]^2 + f(h(x)) = g(x) \,, \forall x \in [0,1].$$

a) Démontrer que cette équation fonctionnelle a une solution dans B'_r. Est-elle unique dans B'_r?

b) Cette équation fonctionnelle a-t-elle une unique solution dans E?