Examen de Septembre 1999

Aucun document n'est autorisé.

Les problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barême suivant n'est qu'indicatif : I = 8 points, II = 5 points, III = 7 points.

Toutes les réponses devront être justifiées. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction.

I. Soit X un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est *localement fermé* si on a $A = U \cap F$ avec U ouvert et F fermé.

1) Montrer que l'intersection de deux parties localement fermées est localement fermée.

2) Soit $f : X \to X$ continue. Montrer que $f^{-1}(A)$ est localement fermé si A est localement fermé.

3) Si A est dense dans X, montrer : A localement fermé $\Leftrightarrow$ A ouvert.
Plus généralement, montrer : A localement fermé $\Leftrightarrow$ A ouvert dans $\overline{A}$.

4) Soit $X = \mathbb{R}$ et $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$. Montrer que A est localement fermé et que $\mathbb{R} \setminus A$ ne l'est pas.

5) Soit A localement fermé. Montrer que tout $x \in A$ possède dans X un voisinage ouvert V tel que $A \cap V$ est fermé dans V.

Réciproquement, on suppose que tout $x \in A$ a dans X un voisinage ouvert V avec $A \cap V$ fermé dans V. Montrer que A est ouvert dans $\overline{A}$ (donc localement fermé).

II. Soit (E, d) un espace métrique, et $\mathcal{F}$ une famille d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$. On définit sur E les applications σ et μ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$