par

$$\forall x \in E, \quad \sigma(x) = sup\,\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \text{ et } \mu(x) = inf\,\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $(x, y) \in E \times E$ et $f \in \mathcal{F}$, on a

$$d(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

1) Soit Y l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $\sigma(x)$ et $\mu(x)$ soient finis. Montrer que Y est un ouvert de E.

2) Montrer que Y est un fermé de E.

3) On suppose de plus qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 2000$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Montrer que si E est connexe les applications σ et μ sont à valeurs dans $\mathbf{R}$.

III. Soit V un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. On note B' la boule unité fermée, et $L(V)$ l'espace des applications linéaires continues de V dans V. Soit $K(V)$ l'ensemble des applications linéaires $f : V \to V$ telles que $\overline{f(B')}$ soit compact.

1) (Question de cours) Démontrer que toute partie compacte A de V est fermée et bornée. Dire pour quels espaces vectoriels normés la réciproque est vraie.

2) Soit $f \in K(V)$. Montrer que $f(B')$ est borné, puis que f est continue.

3) Soit $f \in K(V)$ et $g \in L(V)$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ appartiennent à $K(V)$.

4) Si V est de dimension finie, montrer $K(V) = L(V)$.

5) Si V est de dimension infinie, montrer que l'identité de V n'appartient pas à $K(V)$.