Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE - corrigé de l'examen du 04/09/07

Exercice I. (2+1,5+6+1=10,5pts)

1. (2pts) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, $||(u \circ v)(x)|| \leq ||u||\ ||v(x)|| \leq ||u||\ ||v||\ ||x||$ donc $||u \circ v|| \leq ||u||\ ||v||$.
   Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. $(id + h)^2 = id \Leftrightarrow h^2 + 2h = 0 \Leftrightarrow h$ est diagonalisable et ses valeurs propres appartiennent à $\{0, -2\}$. Si de plus $h \neq 0$ alors -2 est effectivement valeur propre, donc $||h|| \geq 2$.
   Soit B la boule ouverte de centre id et de rayon 2, alors $B \cap X = \{id\}$ donc id est isolée dans X.

2. (1,5 pt) Dans X, $\{id\}$ est un fermé propre, également ouvert d'après 1., donc X n'est pas connexe.

3. (2+2+2=6 pts)

   a) (2 pts) Soit u_k symétrie par rapport à F, parallèlement à $\mathrm{R}((e_1/k) + e_n)$ (par hypothèse, $n > 1$). Alors $u - u_k$ est nul sur F et $(u - u_k)(e_n) = 2e_1/k$, donc $u - u_k \to 0$ (pour la norme N sur $\mathcal{L}(E)$ définie par $N(v) = max(||v(e_1)||, \ldots, ||v(e_n)||)$, donc aussi pour la norme choisie sur $\mathcal{L}(E)$, puisque toutes sont équivalentes).

   b) (2 pts) $||\sigma_k(0, 1)|| = ||(-2k, -1)|| = \sqrt{1 + 4k^2} > 2k = 2k||(0, 1)||$ donc $||\sigma_k|| > 2k$. Plus généralement en dimension $n \geq 2$, la symétrie σ_k par rapport à $vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$, parallèlement à $\mathrm{R}(ke_1 + e_n)$ envoie e_n sur $-e_n - 2ke_1$ donc est de norme $> 2k$, donc X_H est une partie non bornée de $\mathcal{L}(\mathrm{R}^n)$.

   c) (2 pts) Puisque $X_H = \chi^{-1}(\{X-1)^{n-1}(X+1)\})$, pour prouver que X_H est fermé il suffit de prouver que $\chi : \mathcal{L}(E) \to \mathrm{R}_n[X]$ est continue pour la topologie sur $\mathrm{R}_n[X]$ correspondant (par identification d'un polynôme à la liste de ses coefficients) à la topologie usuelle (produit) sur R^{n+1}. Il s'agit donc de prouver que chaque coefficient de χ_u est une fonction continue de u. En fixant une base de E on peut identifier $\mathcal{L}(E)$ à $M_n(\mathrm{R})$ donc à R^{n^2}. Chaque coefficient de $det(M - XI)$ est une fonction polynômiale des n^2 composantes de M, donc est bien une fonction continue sur R^{n^2} (quelle que soit la norme sur R^{n^2} puisqu'elles sont toutes équivalentes, en particulier pour la norme qui correspond, via l'identification, à la norme choisie sur $\mathcal{L}(E)$).

4. (1 pt) X est non borné d'après 3.b, donc non compact.

Exercice II. (3+3,5+4,5+4=15 pts)

1. (1,5+0,5+1=3 pts)

   a) (1,5 pt) "Si" est évident. Prouvons "seulement si". Quand $y = 0$ c'est immédiat. Supposons donc $y \neq 0$ et $|\langle x, y\rangle| = ||x||\ ||y||$, et posons $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = at^2 + 2bt + c$ avec $a = ||y||^2 \neq 0$, $b = \langle x, y\rangle$, $c = ||x||^2$, donc $b^2 = ac$, donc $P(-b/a) = 0$, donc $x = (b/a)y$.

   b) (0,5 pt) "Si" est évident. Prouvons "seulement si". Quand $y = 0$ c'est immédiat. Supposons donc $y \neq 0$ et $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ c'est-à-dire (en élevant au carré et en simplifiant) $\langle x, y\rangle = ||x||\ ||y||$. D'après a) il existe $\lambda \in \mathrm{R}$ tel que $x = \lambda y$. De plus, ici, $0 \leq \langle x, y\rangle = \lambda||y||^2$ donc $\lambda \geq 0$.

   c) (1 pt) Posons $N(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2|)$, $x = (1, 0)$, $y = (1, 1)$. Alors $N(x + y) = N(x) + N(y)$ mais x, y ne sont pas colinéaires.

2. (2+1,5=3,5 pts)

   a) (2 pts) Tous les $f^{(i)}(a)$ sont dans K (par récurrence sur i) donc (par convexité) $a_p \in K$. Par linéarité de f, $\varepsilon_p := f(a_p) - a_p$ se simplifie en $\frac{1}{p+1}(f^{(p+1)}(a) - a)$. Soit d le diamètre de K ($d < \infty$ car K compact), on a donc $||\varepsilon_p|| \leq \frac{d}{p+1}$, donc $\varepsilon_p \to 0$ quand $p \to \infty$.

   b) (1,5 pt) $a_p \in K$ compact donc il existe une sous-suite $(a_{p_j})_j$ convergente de $(a_p)_p$. Soit β sa limite ($\beta \in K$). Quand $j \to \infty$, $f(a_{p_j}) \to f(\beta)$ par continuité de f (application linéaire en dimension finie), donc $\varepsilon_{p_j} \to f(\beta) - \beta$, donc (d'après a)) $f(\beta) = \beta$.

3. (2+2,5=4,5 pts)

   a) (2 pts) Pour x fixé dans R^n l'application $u \mapsto u(x) \in \mathrm{R}^n$ est continue sur $\mathcal{L}(\mathrm{R}^n)$ (car linéaire et de norme $||x||$), donc sa restriction à G_n aussi. Donc le sup sur le compact $\mathcal{G}$ qui définit $\nu(x)$ est atteint donc fini. ν est donc bien une application de R^n dans R^+. De plus (pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{R}^n)$) $x \mapsto ||u(x)||$ est une semi-norme donc ν aussi. Enfin, $id \in \mathcal{G}$ donc $\nu(x) \geq ||x||$. Donc ν est une norme sur R^n. Pour tout $g \in \mathcal{G}$, de $\mathcal{G}g = \mathcal{G}$ on déduit $\nu \circ g = \nu$.

   b) (2,5 pts) "Si" est évident. Prouvons "seulement si". Supposons donc $y \neq 0$ et $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$. On a déjà vu que le sup qui définit $\nu(x+y)$ est atteint. Soit donc $u_0 \in \mathcal{G}$ tel que $\nu(x+y) = ||u_0(x+y)||$. On a $||u_0(x+y)|| = \nu(x) + \nu(y) \geq ||u_0(x)|| + ||u_0(y)||$ donc d'après 1.b), $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés, donc (en appliquant u_0^{-1}) x et y aussi. Déduisons-en par récurrence sur $m \geq 2$ que si $\nu(\sum_{j=1}^m x^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \nu(x^{(j)})$ alors les $x^{(j)}$ sont deux à deux positivement liés. On vient de prouver le cas $m = 2$. Supposons la propriété vraie jusqu'à m et montrons-la pour $m+1$. Posons $x = \sum_{j=1}^m x^{(j)}$ et $y = x^{(m+1)}$. De $\nu(x) + \nu(y) \geq \nu(x+y) = \sum_{j=1}^{m+1} \nu(x^{(j)}) \geq \nu(x) + \nu(y)$ on déduit à la fois $\nu(x) = \sum_{j=1}^m \nu(x^{(j)})$ (donc par hypothèse de récurrence, $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ deux à deux positivement liés) et $\nu(x) + \nu(y) = \nu(x+y)$ (donc d'après le cas $m = 2$ déjà traité, x, y positivement liés), d'où la conclusion.

4. (0,5+0,5+1+1+1=4 pts)

   a) (0,5 pt) $F_u = K \cap \mathrm{Ker}(u - id)$ est un fermé de K car $\mathrm{Ker}(u - id)$ est un fermé de R^n (car u continue).

   b) (0,5 pt) K est stable par les u_j, et convexe, donc stable par w. D'après 2., il existe donc $\alpha \in K$ tel que $w(\alpha) = \alpha$.

   c) (1 pt) Par définition de w et α, $\nu(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^p u_j(\alpha)) = \nu(w(\alpha)) = \nu(\alpha)$. Par $\mathcal{G}$-invariance de ν, $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^p \nu(u_j(\alpha)) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^p \nu(\alpha) = \nu(\alpha)$. Donc $\nu(\sum_{j=1}^p u_j(\alpha)) = \sum_{j=1}^p \nu(u_j(\alpha))$ donc d'après la fin de 3.b, les $u_j(\alpha)$ sont deux à deux positivement liés ...

   d) (1 pt) ... et de même ν-norme (on l'a déjà dit), donc égaux. On vient de prouver que pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$, il existe un $\alpha \in K$ qui a même image par tous les éléments de $\mathcal{F}$. En appliquant ceci à $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_p, id\}$ on en déduit un $\alpha \in K$ qui est fixe par tous les u_j.

   e) (1 pt) D'après a) et d) et par compacité de K, $\cap_{u \in \mathcal{G}} F_u \neq \emptyset$, autrement dit il existe un $\alpha \in K$ qui est fixe par tous les éléments de $\mathcal{G}$.