UNIVERSITE PAUL SABATIER Licence de Mathématiques Fondamentales

Devoir de Topologie Novembre 2006 **A rendre la semaine du 4 Décembre**

Le théorème d'approximation de Korovkin, proposé par C. Roche

I.(Généralités)

1-a) Soit $x \in X$ et supposons que $\gamma(x) = 0$ ainsi $\alpha(x) = 0$ aussi et alors quelque soit $M > 0$ $\alpha(x) < \varepsilon + M\gamma(x)$, dans ce cas, x est dans tous les U_M. Parcontre, si $\gamma(x) \neq 0$, $\gamma(x) > 0$, prenons $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, telque$\alpha(x) \neq \varepsilon'$, nous pouvons poser $M = |\alpha(x) - \varepsilon'|/\gamma(x)$. En effet, $M > 0$, et $M\gamma(x) = |\alpha(x) - \varepsilon'| \geq \alpha(x) - \varepsilon'$. Ainsi $\alpha(x) \leq \varepsilon' + M\gamma(x) < \varepsilon + M\gamma(x)$, x appartient à ce U_M et $(U_M)_{M>0}$ est un recouvrement de X. Les parties U_M sont évidement ouvertes, car $\alpha - M\gamma - \varepsilon$ est une fonction continue.

b) Pour chaque ε, on peut considérer le recouvrement ouvert $(U_M)_{M>0}$ et utiliser la compacité de X pour extraire un sous recouvrement : $U_{M_1}, U_{M_2}, \ldots, U_{M_{n(\varepsilon}}$ de X. Soit $M(\varepsilon) = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_{n(\varepsilon}\}$.

Soit $x \in X$, il existe $i \in [1, \ldots, n(\varepsilon)]$ tel que $x \in U_{M_i}$ et donc $\alpha(x) < \varepsilon + M_i\gamma(x) \leq \varepsilon + M(\varepsilon)\gamma(x)$ parce que γ est positive. Ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $M > 0$ tel que $\alpha(x) < \varepsilon + M\gamma(x)$ sur tout le domaine des x.

2- a) Notons d la distance de l'espace métrique X, et choisissons une distance sur $X \times X$ par exemple $d_1(x,t),(x',t')) = d(x,x') + d(t,t')$ $\quad X \times X$ en deviens un espace métrique compact. Nous noterons $|||.|||$ la norme de $C(X \times X)$. Nous avons que, par la compacité de $X \times X$, γ est uniformement continue, c'est-à-dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $d_1((x,t),(x',t')) < \eta$ nous avons $|\gamma(x,t) - \gamma(x',t')| < \varepsilon$.

Soient $\varepsilon > 0$ et x, x' deux points de X tels que $d(x,x') < \eta$ ci-dessus, alors $d_1((x,t),(x',t)) < \eta$ alors $|\gamma_t(x) - \gamma_t(x')| < \varepsilon$. Ceci prouve que γ_t est continue (uniformement) sur X.

Soient $\varepsilon > 0$ et $t, t' \in X$ tels que $d(t,t') < \eta$ nous avons pour un x arbitraire, $d_1((x,t),x,t')) < \eta$ alors, $|\gamma_t(x) - \gamma_{t'}(x)| = |(\gamma_t - \gamma_{t'})(x)| < \varepsilon$. En prenant la borne supérieure sur $\in X$ on obtient $\|\gamma_t - \gamma_{t'}\| < \varepsilon$. C'est-à-dire que $t \mapsto \gamma_t$ est continue (uniformement) de X à valeurs dans le Banach $C(X)$.

b) Nous savons que $Z(\gamma) \subset \Delta(f)$, ainsi, si $\gamma(x,t) = 0$ alors, $(x,t) \in \Delta(f)$, c'est-à-dire $f(x) = f(t)$ d'où il est évident que $\alpha(x,t) = 0$ i.e. $(x,t) \in Z(\alpha)$.

Puisque tant γ (par hypothèse) et α (évidence) ce sont des fonctions positives, nous pouvons appliquer 1)b) pour l'espace métrique compact $X \times X$ pour avoir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $\alpha < \varepsilon + M\gamma$. C'est à dire que pour tout couple x, t d'éléments de X, $\quad |f(x) - f(t)| < \varepsilon + M\gamma_t(x)$.

c)i) Supposons donc que pour $\alpha, \beta \in C(X)$, $\quad ||\alpha - \beta||_\infty \leq \eta$ cela entraîne que pour tout $x \in X$ $|\alpha(x) - \beta(x)| < \eta$, $-\eta < \alpha(x) - \beta(x) < \eta$ que l'on peut écrire $-\eta\mathbf{1}(x) < \alpha(x) - \beta(x) < \eta\mathbf{1}(x)$ pour la fonction $\mathbf{1}$ constante 1. En appliquant la fonction L linéaire positive nous avons $-\eta L(\mathbf{1})(x) \leq L(\alpha)(x) - L(\beta)(x) \leq \eta L(\mathbf{1})(x)$ pour tout $x \in X$. Ainsi $\forall x \in X \quad |L(\alpha)(x) - L(\beta)(x)| \leq \eta L(\mathbf{1})(x) \leq \eta\|L(\mathbf{1})\|_\infty$ et en prenant la borne supérieure selon $x \in X$ nous concluons que $||L(\alpha) - L(\beta)||_\infty \leq \eta||L(\mathbf{1})||_\infty$. Ceci entraîne évidement que L est une application continue de $C(X)$ dans lui même muni de la norme de la convergence uniforme. En effet, si $\varepsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/||L(\mathbf{1})||_\infty$ si $||L(\mathbf{1})||_\infty \neq 0$ et 1 sinon pour conclure que si $||\alpha - \beta||_\infty \leq \eta$, $\quad ||L(\alpha) - L(\beta)||_\infty \leq \varepsilon$. C'est-à-dire, L est continue.

ii) Evidement, $|L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_t)(t)| = |L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_{t_0})(t) + L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_t)(t)| \leq |L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_{t_0})(t)| + |L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_t)(t)| = |L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_{t_0})(t_0)| + |(L(\gamma_{t_0}) - L(\gamma_t))(t)|$ Pour le dernier terme, on peut majorer en prenant la borne supérieure en $t \in X$ pour conclure

$$|L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_t)(t)| \leq |L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_{t_0})(t_0)| + ||L(\gamma_{t_0}) - L(\gamma_t)||_\infty.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ de par la continuité de $L(\gamma_{t_0})$ il existe η_1 tel que si $d(t,t_0) < \eta_1$ nous avons $|L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_{t_0})(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puis de par la continuité de L il existe $\eta_2 > 0$ tel que si $d(t,t_0) < \eta_2$ nous avons $||L(\gamma_{t_0}) - L(\gamma_t)||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On en conclut, en prenant $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $d(t,t_0) < \eta$ nous avons $|L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_t)(t)| < \varepsilon$. La fonction $t \mapsto L(\gamma_t)(t)$ est un élément de $C(X)$.

d)i) En b) nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon + M\gamma(x,t)$ pour chaque couple de x et t dans X. Fixons $t \in X$ et $\varepsilon > 0$, soit $M > 0$ tel que $-\varepsilon - M\gamma(x,t) \leq f(x) - f(t) \leq \varepsilon + M\gamma(x,t)$ pour tout $x \in X$; t étant fixé, ce sont des fonctions de x y compris $\varepsilon = \varepsilon\mathbf{1}(x)$, $f(t) = f(t)\mathbf{1}(x)$ et γ_t. Pour un $n \in \mathbb{N}$ en appliquant L_n, qui est linéaire positive (H_+), nous obtenons l'inégalité demandée :

$$-\varepsilon L_n(\mathbf{1}) - ML_n(\gamma_t) \leq L_n(f) - f(t)L_n(\mathbf{1}) \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1}) + ML_n(\gamma_t).$$

ii) L'inégalité entre fonctions ci-dessus, pour chaque $x \in X$ donne $|L_n(f)(x) - f(t)L_n(\mathbf{1})(x)| \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1})(x) + ML_n(\gamma_t)(x)$ ou en particulier pour le point $x = t$,

$$|L_n(f)(t) - f(t)L_n(\mathbf{1})(t)| \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) + ML_n(\gamma_t)(t).$$

Puisque $|L_n(f)(t) - f(t)L_n(\mathbf{1})(t)| = |L_n(f)(t) - f(t) + f(t) - f(t)L_n(\mathbf{1})(t)| \geq |L_n(f)(t) - f(t)| - |f(t) - f(t)L_n(\mathbf{1})(t)|$ nous avons $|L_n(f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) + ML_n(\gamma_t)(t) + |f(t) - f(t)L_n(\mathbf{1})(t)| = \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) + ML_n(\gamma_t)(t) + |f(t)||1 - L_n(\mathbf{1})(t)|$. En majorant $|f(t)|$ par sa norme, nous avons démontré

$$|L_n(f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) + ML_n(\gamma_t)(t) + ||f||_\infty|L_n(\mathbf{1})(t) - 1|.$$

iii) Puisque $L_n([\mathbf{1}]$ converge uniformement vers $\mathbf{1}$ (H_1) il existe un N_1 à partir duquel $|L_n(\mathbf{1})(t) - 1| < \frac{1}{2}$ quelque soit t et donc $\frac{1}{2} < L_n(\mathbf{1})(t) < \frac{3}{2}$. Ainsi si $n > N$, $\quad \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) < \frac{3\varepsilon}{2}$. Aussi, parce que $L_n(\gamma_t)(t)$ converge uniformement vers $\mathbf{0}$

(H_γ) il existe N_2 telque si $n > N_2$ $\quad ML_n(\gamma_t)(t) < \frac{\varepsilon}{4}$ quelque soit $t \in X$. Enfin, et à nouveau il existe N_3 tel que si $n > N_3$ $\quad ||f||_\infty |L_n(\mathbf{1})(t) - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$ quelque soit $t \in X$. En additionnant le tout, et en prenant le maximum des N_j il existe N tel que si $n > N$ $\quad |L_n(f)(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$ et ce quelque soit $t \in X$.

e) Dans la dernière inégalité, en prenant la borne supérieure en $t \in X$ on reconnaît la convergence de la suite $(L_n(f))_n$ vers f dans $C(X)$. Rassemblons les arguments. Soit $f \in C(X)$ et considérons $\varepsilon > 0$ d'après d)iii) il existe N indépendant de t tel que si $n > N$, $\quad |L_n(f)(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$ et donc $||L_n(f) - f||_\infty \leq 2\varepsilon$ ainsi $(L_n(f))_n$ vers f.

Comme dans tout problème d'approximation, il faut considérer f comme une inconnue qu'il faut approcher, les $L_n(f)$ comme des fonctions connues, et l'affirmation de convergence uniforme précise que l'on peut substituer $L_n(f)$ à f dans des calculs approchés, avec une erreur qui peut s'évaluer, indépendamment de t. L'enoncé suivant montre bien que les $L_n(f)$ qui seront des polynômes sont des fonctions "mieux comprises" que f.

II. (Le théorème classique de Weierstrass)

a)i) Puisque $p_0 \equiv 1$, pour tout k $\quad p_0(\frac{k}{n}) = 1$ et $L_n(p_0)(x) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1$. Nous avons l'hypothèse H_1.

ii) Commençons par faire remarquer que si $0 < k < n$, $\frac{k}{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. ainsi pour $n > 1$

$$L_n(p_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} + x^n =$$

$$= x \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} + x^n = x \sum_{k=0}^{n-2} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-1-k} + x^n =$$

$$x(L_{n-1}(p_0)(x) - x^{n-1}) + x^n = xL_{n-1}(p_0)(x) = x.$$

Pour $n = 1$ on a $L_1(p_1)(x) = 0 \times (1-x) + 1 \times x = x$ évidement, ce qui prouve ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Nous avons pour $n > 1$

$$L_n(p_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} + x^n =$$

$$x \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-1}{n} (\frac{k-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}) \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + x^{n-1} \right) =$$

$$x \left(\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \right) + x^{n-1})$$

$$x\frac{n-1}{n}(L_{n-1}(p_1)(x) - x^{n-1}) + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n},$$

$$L_n(p_2) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}.$$

Comme demandé, puisque pour $n = 1$, $L_1(p_2)(x) = x$ directement.

b) Bien entendu, pour chaque t $\quad \gamma_t(x) = x^2 - 2tx + t^2$, $\gamma_t = p_2 - 2tp_1 + t^2 p_0$. Ainsi, puisque L_n est visiblement linéaire $L_n(\gamma_t) = L_n(p_2) - 2tL_n(p_1) + t^2 L_n(p_0)$. La suite λ_n, $\lambda_n(t) = L_n(\gamma_t)(t)$ est la suite de fonctions $t \mapsto L_n(p_2)(t) - 2tL_n(p_1)(t) + t^2 L_n(p_0)(t) = \frac{n-1}{n}t^2 + \frac{t}{n} - 2t^2 + t^2 = \frac{t(1-t)}{n}$. Or $\|\frac{t(1-t)}{n}\|_\infty = \frac{1}{4n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. L'hypothèse H_γ est vérifiée. Il ne reste qu'a signaler que lorsque f est une fonction positive sur $[0,1]$ puisque les termes $f(\frac{k}{n}) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$ sont des polynômes positifs sur $[0,1]$ la fonction $L_n(f)$ est positive en plus d'être polynomiale. Ainsi L_n est positive. L'ensemble des hypothèses H est vérifié, en plus d'avoir $[0,1]$ métrique compact !

c) les résultats de la partie I s'appliquent. Quelque soit $f \in C[0,1]$ La suite de fonctions polynomiales $(L_n(f))_n$ converge uniformement vers la fonction f. Considérons $g \in C[a,b]$ pour $a < b$ et soit $\varphi(x) = (b-a)x + a$ la bijection affine de $[0,1]$ sur $[a,b]$ et $\psi(t) = \frac{t-a}{b-a}$ sa réciproque. Nous avons que $f(x) = g(\varphi(x)) \in C[0,1]$ ainsi la suite $(L_n(f))_n$ converge uniformement vers f. Montrons que la suite des $l_n(f) \circ \psi$ converge uniformement vers g. Il suffit de voir que $\|l_n(f) \circ \psi - f \circ \psi\| = \|l_n(f) - f\|_\infty$ ce qui est immédiat parla surjectivité de ψ. Enfin remarquons que les $(l_n(f) \circ \psi)(t)$ sont bien des fonctions polynomiales en t. Le théorème classique de Weierstrass est démontré.

II. (Le théorème d'approximation de Korovkin)

La preuve du résultat de Korovkin est similaire à la preuve du théorème de Weierstrass ci-dessus. C'est une généralisation. Il suffit de reprendre en II b). Ainsi, en posant $\gamma(x,t) = (x-t)^2$ nous avons $\gamma_t(x) = x^2 - 2tx + t^2$, $\gamma_t = p_2 - 2tp_1 + t^2 p_0$. Ainsi, puisque L_n est par hypothèse linéaire $L_n(\gamma_t) = L_n(p_2) - 2tL_n(p_1) + t^2 L_n(p_0)$. La suite λ_n, $\lambda_n(t) = L_n(\gamma_t)(t)$ est la suite de fonctions $t \mapsto L_n(p_2)(t) - 2tL_n(p_1)(t) + t^2 L_n(p_0)(t)$ c'est la fonction $L_n(p_2) - 2p_1 L_n(p_1) + p_2 L_n(p_0)$ somme de produit de suites convergentes dans $C[0,1]$, c'est une suite convergente, de limite (uniforme!) $p_2 - 2p_1 p_1 + p_2 p_0$ par l'hypothèse. Or $p_2 - 2p_1 p_1 + p_2 p_0 = 0$ et l'hypothèse H_γ de I est vérifiée. L'hypothèse H_1 est que $(L_n(p_0))_n$ converge uniformement vers la fonction p_0 et enfin, la linéarité et positivité sont dans les hypothèses. Ainsi les conclutions de I 2)e) sont applicables, pour chaque $f \in C[0,1]$, la suite de fonctions $L_n(f)$ converge uniformement vers f.