UNIVERSITE PAUL SABATIER Licence de Mathématiques Fondamentales

Devoir de Topologie Novembre 2006 **A rendre la semaine du 4 Décembre**

Le théorème d'approximation de Korovkin, proposé par C. Roche

I.(Généralités)

Soit (X, d) un espace métrique compact. Nous notons $C(X)$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme : $||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Soit $\alpha \in C(X)$, on dira que α est positive, noté $\alpha \geq 0$, si $\alpha(x) \geq 0$ pour chaque $x \in X$. Ainsi $\alpha \geq \beta$ signifie que $\alpha - \beta$ est positive, c'est-à-dire que $\forall x \in X,\ \alpha(x) \geq \beta(x)$. Nous noterons $Z(\alpha) = \alpha^{-1}(0)$ son lieu de zéros.

1- Soient $\alpha \geq 0,\ \gamma \geq 0$ des éléments de $C(X)$ tels que $Z(\gamma) \subset Z(\alpha)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que la famille $(U_M)_{M>0}$

$$U_M = \{x \in X / \quad \alpha(x) < \varepsilon + M\gamma(x)\}$$

est un recouvrement ouvert de X.

b) En considérant, pour chaque ε, le maximum d'une famille finie de M convenable, déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $\alpha \leq \varepsilon + M\gamma$, c'est-à-dire

$$\forall x \in X \qquad \alpha(x) \leq \varepsilon + M\gamma(x).$$

2- Nous noterons, pour chaque $\gamma \in C(X \times X)$ et chaque $t \in X$ fixé, γ_t la fonction définie par $\gamma_t(x) = \gamma(x, t)$.

a) Montrer que $\gamma_t \in C(X)$ pour chaque t et que $t \mapsto \gamma_t : X \to C(X)$ est continue.

Soit $f \in C(X)$, notons $\Delta(f) = \{(x, x') \in X \times X / \quad f(x) = f(x')\}$. Fixons une fonction $\gamma \in C(X \times X)$ qui soit *positive* et supposons que $Z(\gamma) \subset \Delta(f)$.

b) Soit $\alpha(x, t) = |f(x) - f(t)|$. i) Montrer que $Z(\gamma) \subset Z(\alpha)$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon + M\gamma(x, t)$ pour chaque couple de x et t dans X.

On dira qu'une application linéaire $L : C(X) \to C(X)$ est positive si $L(\alpha)$ est une fonction positive pour chaque fonction positive α. On vérifie évidement que si $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in C(X)$ et $\lambda\alpha + \mu\beta \leq \lambda'\alpha' + \mu'\beta'$ alors $\lambda L(\alpha) + \mu L(\beta) \leq \lambda' L(\alpha') + \mu' L(\beta')$.

c)i)) Montrer pour L linéaire positive de $C(X)$ dans $C(X)$ que pour chaque $\eta > 0,\ \ ||\alpha - \beta||_\infty \leq \eta$ entraîne $||L(\alpha) - L(\beta)||_\infty \leq \eta ||L(\mathbf{1})||_\infty$. En déduire la continuité de L.

ii) Montrer que $|L(\gamma_{t_0})(t_0) - L(\gamma_t)(t)| \leq |L(\gamma_{t_0})(t) - L(\gamma_{t_0})(t_0)| + ||L(\gamma_{t_0}) - L(\gamma_t)||_\infty$ En déduire que la fonction $t \mapsto L(\gamma_t)(t)$ est continue sur X, c'est-à-dire, un élément de $C(X)$.

Considérons $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires de $C(X)$ vers $C(X)$. Et considérons les hypothèses suivantes :

- H_+ Toutes les applications L_n sont linéaires et positives.
- H_1 La suite de fonctions $(L_n(\mathbf{1}))_n$, images de la fonction constante $\mathbf{1}$, est une suite qui converge vers $\mathbf{1}$ dans $C(X)$. (I.e. uniformement sur X.)
- H_γ Pour chaque n, $\quad \lambda_n : t \mapsto L_n(\gamma_t)(t) \in C(X)$. La suite des fonctions $(\lambda_n)_n$ converge vers $\mathbf{0}$ dans $C(X)$.

d) Supposons donc que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois hypothèses ci-dessus et soit $t \in X$ et $\varepsilon > 0$.

i) Déduire de b)

$$-\varepsilon L_n(\mathbf{1}) - ML_n(\gamma_t) \leq L_n(f) - f(t)L_n(\mathbf{1}) \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1}) + ML_n(\gamma_t).$$

ii) En déduire $|L_n(f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon L_n(\mathbf{1})(t) + ML_n(\gamma_t)(t) + ||f||_\infty |L_n(\mathbf{1})(t) - 1|$.

iii) Démontrer qu'il existe N tel que si $n \geq N$ pour tout $t \in X \quad |L_n(f)(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$.

e) Conclure que sous les hypothèses H_+, H_1 et H_γ sur la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous avons que pour chaque $f \in C(X)$ la suite $(L_n(f))_n$ converge vers f dans $C(X)$.

II. (Le théorème classique de Weierstrass)

Travaillons maintenant dans $C[0,1]$, l'espace des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle réel $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Introduisons de suite $\gamma(x,t) = (x-t)^2$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}$$

le polynôme d'interpolation de Bernstein pour f. Soient $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x$ et $p_2(x) = x^2$.

a) Vérifier i) $L_n(p_0)(x) = (x + (1-x))^n = 1$ pour tout n.

ii) $L_n(p_1)(x) = x$ pour tout n.

iii) $L_n(p_2)(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}$ pour tout n.

b) Vérifier $L_n(\gamma_t) = L_n(p_2) - 2tL_n(p_1) + t^2 L_n(p_0)$. En déduire que les hypothèses H_+ H_1 et H_γ sont vérifiées.

c) Démontrer le théorème de Weierstrass suivant : " Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de la droite est limite uniforme d'une suite de polynômes". (Indication, : par une affinité l'on se ramène au domaine $[0,1]$.)

II. (Le théorème d'approximation de Korovkin)

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ une suite d'applications linéaires positives, et supposons que

$(L_n(p_k))_n$ converge uniformément vers la fonction p_k pour $k = 0,1,2$.

Alors quelque soit $f \in C[0,1]$, la suite $(L_n(f))_n$ converge uniformément vers f.

(Indication : on introduit la même fonction γ que pour Weierstrass).