Licence de Mathématiques - TOPOLOGIE.

23 janvier 2007 – Durée 3 heures.

Exercice I. Soit H un espace de Hilbert et u une forme linéaire continue non nulle sur H. Justifier le fait que $(\ker u)^\perp \neq \{0\}$. Soit z un vecteur non nul de $(\ker u)^\perp$; prouver l'existence d'un vecteur a colinéaire à z tel que $u(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$. En déduire le théorème de dualité de Riesz.

Exercice II. Un espace topologique est dit totalement discontinu lorsque ses seules parties connexes non vides sont les singletons. Démontrer que les sous-espaces totalement discontinus de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties d'intérieur vide.

Exercice III. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des cercles du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de rayon positif ou nul. Pour C_1 et C_2 appartenant à $\mathcal{E}$, de centres et rayons respectifs (x_j, y_j) et r_j, $j = 1, 2$, on pose $\delta(C_1, C_2) = \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + |r_1 - r_2|^2\big)^{1/2}$.

1) Montrer que :

a) δ définit une distance sur $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{E}, \delta)$ est isométrique à un demi-espace de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

b) l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à un cercle associe son centre est uniformément continue.

2) Montrer que $(\mathcal{E}, \delta)$ est complet.

3) Soit A une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

a) l'ensemble $\mathcal{A}$ des cercles de $\mathcal{E}$ dont le centre appartient à A est un fermé de $\mathcal{E}$.

b) l'ensemble $\mathcal{B}$ des cercles contenus dans A est un fermé de $\mathcal{E}$.

(*On pourra considérer les applications suivantes f_θ où θ parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$:* $f_\theta : C \in \mathcal{E} \mapsto w + re^{i\theta}$, *où w est l'affixe du centre de C et r le rayon de C*).

4) Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathcal{E}$ contenus dans K est une partie compacte de $\mathcal{E}$ et qu'il existe dans $\mathcal{G}$ un cercle de rayon maximal.

Exercice IV. On identifiera tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à la suite de ses coefficients $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, ce qui permet de considérer $\mathbb{R}[X]$ comme un sous-espace vectoriel normé de l'espace de Banach $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{R})$ des suites réelles absolument sommables (muni de sa norme usuelle $\|a\| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, où $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

$\mathbb{R}[X]$ est donc muni de la restriction de cette norme, on notera $\nu(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

1) $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et est considéré comme un sous-espace de ℓ^1. Justifier la continuité de l'application $\Delta_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$ et calculer la norme de Δ_n.

Démontrer que l'application linéaire $\Delta : P \mapsto P'$ n'est pas continue (de $(\mathbb{R}[X], \nu)$ dans lui-même).

2) Pour α, β réels, on note $[\alpha, \beta]$ le segment $[\alpha, \beta] := \{\alpha + t(\beta - \alpha)\ ,\ 0 \leq t \leq 1\}$.

Pour toutes suites réelles $a,\ b \in \ell^1$ on note $[a, b] = \{c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, c_n \in [a_n, b_n]\}$.

On admettra que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces métriques, la topologie produit sur $\prod E_n$ est définie par n'importe quelle distance d de la forme $d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x_n, y_n)$, pourvu que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d_n soit une distance définissant la topologie de E_n et que $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{E_n \times E_n} (d_n) < \infty$.

a) Vérifier que si $a, b \in \ell^1$ alors $[a, b] \subset \ell^1$ et si $a, b \in \mathbb{R}[X]$ alors $[a, b] \subset \mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que $\forall a, b \in \ell^1$, la topologie sur $[a, b]$ induite par la norme de ℓ^1 n'est autre que la topologie produit sur $\prod [a_n, b_n]$.

c) En déduire que $\forall a, b \in \ell^1$, $[a, b]$ est un compact de ℓ^1, et que $\forall a, b \in \mathbb{R}[X]$, $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}[X]$.

3) Soit $(a^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 convergeant vers le vecteur nul 0 de ℓ^1. On pose $K_p = [0, a^{(p)}]$ et $K = \cup_{p\in\mathbb{N}} K_p$. Montrer que K est un compact de ℓ^1.

BARÊME INDICATIF : I : 4 points - II : 3 points - III : 6 points - IV : 7 points.