Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
4 Septembre 2007 - Durée 3 heures -

Exercice I. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, et $\mathscr{L}(E)$ est muni de la norme subordonnée. On note X l'ensemble des symétries de E, c'est-à-dire l'ensemble des éléments u de $\mathscr{L}(E)$ qui vérifient

$$u^2 = id\,.$$

On rappelle que pour une symétrie u, il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ tels que $u|_F = id_F$ et $u|_G = -id_G$, et qu'une symétrie est donc diagonalisable.

1. Démontrer que si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ alors $||u \circ v|| \leq ||u||\,||v||$. Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ non-nul tel que $u = id + h$ soit dans X. Montrer que $\| h \|$ est minorée par la constante 2. En déduire que id est isolée dans X.

2. Déduire de la question précédente que l'espace X n'est pas connexe.

3. a) Montrer que, si $n \geq 2$, les symétries hyperplanes sont non-isolées dans X. Pour ce faire, étant donnée une telle symétrie u par rapport à un hyperplan F parallèlement à une droite D, on choisira une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $F = Ker(u - id) = vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et $D = Ker(u + id) = \mathbb{R}e_n$, et l'on exhibera une suite non stationnaire $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de symétries hyperplanes telle que $\lim_k u_k = u$.

b) Soit σ_n la symétrie de $\mathbb{R}^2$ définie par $\sigma_n((x, y)) = (x - 2ny, -y)$ (symétrie par rapport à l'axe des x parallèlement à la droite d'équation $x - ny = 0$). Montrer que la norme de σ_n est minorée par 2n et en déduire que l'ensemble des symétries-droites de $\mathbb{R}^2$ n'est pas borné.
Montrer, plus généralement, que si $n \geq 2$ l'ensemble X_H des symétries hyperplanes de $\mathbb{R}^n$ est une partie non bornée de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que X_H est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, la continuité de l'application "polynôme caractéristique" $\chi : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}_n[X]$, $u \mapsto \chi_u$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ étant identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. L'espace X est-il compact ?

Exercice II.
1. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $||.||$ la norme associée.

a) Démontrer que $|\langle x, y\rangle| = ||x||\,||y||$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $x = \lambda y$ (ou $y = \lambda x$) et que λ lorsqu'il est non nul est du signe de $\langle x, y\rangle$ (*on remarquera que, pour tout réel t,* $\langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0$.

b) En déduire que $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si il existe un réel λ positif ou nul tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

c) Montrer par un contre-exemple que le résultat du b) peut être mis en défaut si l'on remplace la norme euclidienne $||.||$ par une norme N quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (*on pourra considérer la norme* $\max(x_1, x_2)$ *sur* $\mathbb{R}^2$).

2. Soit K un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ (ne contenant pas nécessairement l'origine) et f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même stabilisant K (i.e. $f(K) \subset K$). Le but de la question est de prouver l'existence d'un point fixe de f dans K.
Soit a fixé dans K ; on pose $a_0 = a$ et pour $p \geq 1$, $a_p = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} f^{(i)}(a)$, où $f^{(0)} = id$, $f^{(i)} = f \circ ... \circ f$.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \in K$ et que $f(a_p) = a_p + \varepsilon_p$, avec $\varepsilon_p \to 0_{\mathbb{R}^n}$ lorsque $p \to +\infty$.

b) Justifier l'existence d'une sous-suite $(a_{p_j})_j$ de $(a_p)_p$ convergente dans K puis montrer que sa limite β est un point fixe de f.

3. K est toujours un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$; soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe compact du groupe linéaire $G_n = GL(n, \mathbb{R})$ stabilisant K (pour tout $u \in \mathscr{G}$, $u(K) \subset K$). On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\nu(x) = \sup_{u \in \mathscr{G}} ||u(x)||.$$

a) Vérifier que pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$ l'application $u \in G_n \mapsto u(x) \in \mathbb{R}^n$ est continue. Montrer que ν est une norme sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{G}$-invariante (i.e. pour tout $g \in \mathscr{G}$, $\nu(g(x)) = \nu(x)$).

b) Montrer que $\nu(x + y) = \nu(x) + \nu(y)$ si et seulement si il existe λ réel positif ou nul tel que $x = \lambda y$ (ou $y = \lambda x$). (*on justifiera l'existence d'un élément u_0 de $\mathscr{G}$ tel que $\nu(x+y) = ||u_0(x+y)||$, puis on utilisera la question 1) b)*).
Généralisation : montrer que si des vecteurs $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ de $\mathbb{R}^n$ sont tels que $\nu(\sum_{j=1}^m x^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \nu(x^{(j)})$, alors les $x^{(j)}$ sont deux à deux positivement liés.

4. On note pour tout $u \in \mathscr{G}$: $F_u = \{x \in K \, , \, u(x) = x\}$.

a) Vérifier que F_u est un fermé de K.

b) Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille finie d'éléments de $\mathscr{G}$. On pose $w = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p u_j$.
Vérifier que K est stable par w ; déduire du résultat de la question 2. l'existence d'un point fixe α de w dans K.

c) Prouver l'égalité

$$\nu(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} u_j(\alpha)) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \nu(u_j(\alpha)).$$

En déduire que les $u_j(\alpha)$ sont deux à deux positivement liés.

d) Montrer, en utilisant la $\mathscr{G}$-invariance de la norme ν, que les $u_j(\alpha)$ sont tous égaux ; en déduire que les u_j ont un point fixe appartenant à K en commun (et donc $F_{u_1} \cap ... \cap F_{u_p} \neq \emptyset$).

e) Déduire de ce qui précède l'existence d'un point fixe appartenant à K commun à tous les éléments de $\mathscr{G}$.

BARÈME INDICATIF : Exercice I : 8 points – Exercice II : 12 points.