Examen partiel de Topologie – L3 – 21 novembre 2006
Université Paul Sabatier – Toulouse III

Question de Cours

Énoncer et démontrer le théorème de point fixe de Picard.

Problème

À chaque question, il sera possible utiliser les résultats énoncés dans les questions précédentes même si ceux-ci n'ont pas été démontrés.

Question 1. Soit E un espace topologique séparé. Étant donné une partie A de E, on note $A^{\mathrm{c}} = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E, $\bar{A}$ l'adhérence de A, $\overset{\circ}{A} = \mathrm{Int}(A)$ l'intérieur de A et $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1) Montrer que $(\bar{A})^{\mathrm{c}} = \mathrm{Int}(A^{\mathrm{c}})$.

2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Toute famille dénombrable d'ouverts denses dans E a une intersection dense dans E ;

(ii) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

On dit qu'un espace topologique a la *propriété de Baire* si E vérifie l'une des conditions ci-dessus.

3) On suppose que E a la propriété de Baire et que E est réunion dénombrable de fermés F_n : $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On se propose de montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans E. Soit Y le complémentaire dans E de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$.

(i) Vérifier que $\mathrm{Fr}(F_n)$ est un fermé d'intérieur vide.

(ii) Montrer que $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fr}(F_n)$.

(iii) Conclure.

L'objet de la question suivante est de montrer que les espaces métriques complets sont de Baire.

Question 2. Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans E. On note $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$.

1) Soit O un ouvert non vide de E. Montrer que $O \cap \Omega_1$ contient une boule fermée B_1 d'intérieur non vide de rayon $r \leq \frac{1}{2}$.

2) Montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fermés tous d'intérieur non vide tels que

$$F_1 \subset O \cap \Omega_1, \quad F_n \subset \Omega_n \cap F_{n-1} \text{ pour } n \geq 2, \quad \operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}.$$

3) En déduire que $Y \cap O$ est non vide et que Y est dense dans E.

Question 3. L'objet de cette question est de montrer qu'une limite simple d'une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ est continue sur une partie dense de E à déterminer. Soit E un espace métrique complet et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

1) On pose, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{n,p} = \{x \in E,\ |f_p(x) - f_k(x)| \leq 1/n \text{ pour tout } k \geq p\}.$$

Montrer que $F_{n,p}$ est fermé.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} F_{n,p}$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \overset{\circ}{F}_{n,p}$ est dense dans E.

4) En déduire que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ est dense dans E.

5) Soit $x_0 \in U_n$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in V, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq 3/n.$$

6) En déduire que f est continue en tout point de A.

<u>*barême indicatif*</u> *: (sur 21 pts)*

Question de cours : 5 pts
Question 1 : 5 pts (1 + 1 + 3)
Question 2 : 5 pts (1 + 2 + 2)
Question 3 : 6 pts (1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 2 + 1).