FEUILLE 2 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires discrètes suivantes :

(1) Résultat du lancer d'un dé équilibré.
(2) Somme des résultats des lancers de 2 dés équilibrés.
(3) La différence en valeur absolue des résultats des lancers de 2 dés équilibrés.
(4) Nombre de 5 en n lancers d'un dé équilibré.
(5) X prend les valeurs 0,2,5,8 avec probabilités respectives $\alpha, 2\alpha, \alpha, 5\alpha$ (on précisera de plus la valeur de α).

Exercice 2. Un questionnaire comprend 5 questions pour chacune desquelles on propose 3 réponses dont une seule est exacte. Si pour chaque question on répond au hasard et que le choix des réponses se fait de façon indépendante. Soit X_i la variable aléatoire qui est 1 si la réponse à la question i est exacte, est 0 sinon. Soit S le nombre de réponses exactes.

(1) Quelle est la loi de X_i ? Calculer son espérance et sa variance.
(2) Exprimer S en fonction des X_i.
(3) Quelle est la loi de S ? Calculer $P(S \leq 2)$, $P(S > 0)$, $E(S)$ et $Var(S)$.

Exercice 3. Soit X une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$, on ait $P(X = n-1) = \frac{1}{4}nP(X = n)$. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance. Calculer $E(\frac{1}{X+1})$.

Exercice 4. X est une v. a. de loi géométrique de paramètre p. On définit une v.a. Y de la façon suivante : si X prend une valeur nulle ou impaire alors $Y = 0$; sinon $Y = X/2$. Déterminer la loi de Y. Calculer $E(Y)$ et $E(Y^2)$.

Exercice 5. Dans un jeu de pile ou face on lance successivement une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire. On suppose que la probabilité d'obtenir une pile avec la pièce est p. Soit T_r le nombre minimum de jets nécessaire pour obtenir exactement r piles.

(1) Déterminer la loi de T_1.
(2) Soit $r \geq 2$. Déterminer la loi de T_r. (Indication : « $T_r = k$ » = « le k$^{\text{ème}}$ jet donne pile et parmi les $k-1$ premiers jets, il y a $r-1$ piles et $k-r$ faces ».)
(3) Calculer $E(T_r)$.

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par la table suivante :

X \ Y	-1	0	1
0	1/4	1/6	1/4
1	1/8	0	5/24

(1) Déterminer les lois marginales.
(2) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
(3) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $E(XY^2)$.
(4) Soit $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z. Calculer $E(Z)$.

Exercice 7. On dispose d'un dé et de pièces équilibrés. On realise l'expérience aléatoire suivante. On lance un dé. Si le résultat est 1 ou 2, on ne lance aucune pièce ; si le résultat est 3 ou 4, on lance une pièce ; si le résultat est 5 ou 6, on lance deux pièces. Soit X la v. a. qui est le numéro du dé obtenu. On appelle Y la variable alèatoire correspondant au nombre de piles obtenues avec les pièces.

(1) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
(2) Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
(3) Déterminer la loi de Y.
(4) Que valent la moyenne et la variance de Y ?

Exercice 8. X et Y sont deux v. a. indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

(1) Calculer la fonction de répartition de U. En déduire la loi de U.
(2) Déterminer la loi de V.