

## TD3 : Tests d'adéquation

**Exercice 1.** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de variables aléatoires positives.

1. Déterminer un test asymptotique de l'hypothèse  $H_0 : X$  admet pour densité  $\frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$  contre  $H_1$  au niveau  $\alpha$ .
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\rho$  pour le modèle statistique  $\frac{c_\rho}{(1+x)^\rho} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ .
3. En déduire un test asymptotique de l'hypothèse  $H_0 : X$  admet une densité de la forme  $\frac{c_\rho}{(1+x)^\rho} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$  contre  $H_1$  au niveau  $\alpha$ .

**Exercice 2.** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Montrer que la statistique

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F_n(x) - \Phi \left( \frac{x - \hat{\mu}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_n}} \right) \right|$$

est une statistique libre de  $\mu, \sigma^2$ , où  $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$  sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\mu, \sigma^2$ .

**Exercice 3.** On considère deux variétés de petits pois, les variétés Jaune Lisse et Vert Ridé. La fécondation croisée de ces deux variétés donne des pois Jaune Lisse. Lorsqu'on laisse s'auto-féconder cette nouvelle génération, on obtient 556 plans de pois, dont les phénotypes se répartissent comme suit :

Jaune Lisse	Jaune Ridé	Vert Lisse	Vert Ridé
315	108	101	32

Peut-on réfuter au niveau 5% la loi de Mendel selon laquelle les deux caractères étudiés sont indépendants ?