

TD3 : Tests d'adéquation

Exercice 1. Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de variables aléatoires positives.

1. Déterminer un test asymptotique de l'hypothèse $H_0 : X$ admet pour densité $\frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ contre H_1 au niveau α .
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de ρ pour le modèle statistique $\frac{c_\rho}{(1+x)^\rho} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.
3. En déduire un test asymptotique de l'hypothèse $H_0 : X$ admet une densité de la forme $\frac{c_\rho}{(1+x)^\rho} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ contre H_1 au niveau α .

Exercice 2. Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la statistique

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F_n(x) - \Phi \left(\frac{x - \hat{\mu}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_n}} \right) \right|$$

est une statistique libre de μ, σ^2 , où $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de μ, σ^2 .

Exercice 3. On considère deux variétés de petits pois, les variétés Jaune Lisse et Vert Ridé. La fécondation croisée de ces deux variétés donne des pois Jaune Lisse. Lorsqu'on laisse s'auto-féconder cette nouvelle génération, on obtient 556 plans de pois, dont les phénotypes se répartissent comme suit :

Jaune Lisse	Jaune Ridé	Vert Lisse	Vert Ridé
315	108	101	32

Peut-on réfuter au niveau 5% la loi de Mendel selon laquelle les deux caractères étudiés sont indépendants ?