

TP n° 1 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 Espérance et variance

Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un vecteur de N réels et soit X une variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Soit, pour tout k entier entre 1 et N , $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ et $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$.

1. ☞ Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, peut-on l'écrire sous cette forme? Dans ce cas, que valent N , \vec{x} et \vec{p} ?
2. ☞ Même question si X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.
3. ☞ Exprimer l'espérance de X et sa variance en fonction de x_1, \dots, x_N et p_1, \dots, p_N .
4. Écrire une fonction Matlab `EspVar(Vals, Probs)` qui prend comme arguments deux vecteurs lignes `Vals` et `Probs` de même taille N contenant respectivement les valeurs x_1, \dots, x_N et p_1, \dots, p_N et qui retourne l'espérance et la variance de X .
5. Appliquer cette fonction dans les cas
 - (a) de la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$;
 - (b) de la loi Binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0.2$;
 - (c) de la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, pour $n = 10, 100$ et 1000 ;
 - (d) où $\vec{x} = (-0, 3; 4; -6; 4, 5)$ et $\vec{p} = (0, 1; 0, 3; 0, 15; 0, 35)$.

Exercice 2 Pile ou face

1. Tester la fonction `rand` dans Matlab ou Octave.
2. Comment jouer à pile ou face avec Matlab ou Octave?
3. Écrire une fonction `pile_ou_face` qui n'a pas d'argument et renvoie un résultat aléatoire égal à `true` pour pile et `false` pour face, ces deux résultats étant équiprobables.
4. On veut maintenant simuler le cas où la pièce est éventuellement truquée. Modifier la fonction `pile_ou_face` pour que son premier argument p soit la probabilité de faire pile.
5. On veut simuler beaucoup de parties d'un seul coup. Modifier la fonction `pile_ou_face` ← pour ajouter comme deuxième argument une ligne `L = [m n]` et que la valeur de retour de la fonction `pile_ou_face` soit un tableau de taille `[m n]` dont toutes les entrées sont des résultats de pile ou face.
6. Simuler un échantillon de taille $N = 10000$ de pile ou face, avec $p = 0,4$. Calculer le nombre de piles obtenus, puis la proportion de pile dans votre échantillon. Pouvaient-on s'attendre à un tel résultat?

Exercice 3 Loi binomiale

1. Avec la fonction `pile_ou_face` de l'exercice précédent, écrire une fonction `binomiale` (← `n, p, taille`) qui simule un vecteur ligne de taille `taille` contenant des nombres entiers indépendants aléatoires suivant la loi binomiale de paramètres n et p .
2. Simuler un échantillon de taille 10000, pour $n = 7$ et $p = 0,4$. Calculer la moyenne de cet échantillon. Pouvaient-on s'attendre à ce résultat?
3. Lire la documentation des fonctions `binocdf` et `binopdf` et tester ces fonctions.
4. À l'aide de la fonction `binocdf`, écrire une nouvelle fonction `binomiale2(n, p, taille)` qui n'utilise pas `pile_ou_face` et fait un seul appel à `rand` par simulation.

Exercice 4 Loi géométrique

1. À l'aide de la fonction `pile_ou_face`, écrire une fonction `geometrique(p)` qui simule la loi géométrique de paramètre p .
2. Faire un échantillon de taille 10000 de nombres suivant la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$. Calculer sa moyenne. Commenter.