Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Année universitaire 2020–2021

mallein@math.univ-paris13.fr

TP de Processus stochastiques – Mouvement Brownien

On rappelle que le mouvement Brownien est une fonction aléatoire $(B_t, t \geq 0)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $B_0 = 0$
2. $t \mapsto B_t$ est continu presque sûrement
3. $B_{t+s} - B_t$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, s)$ indépendante de $\sigma(B_u, u \leq t)$.

On peut considérer également le mouvement Brownien comme un processus gaussien, ou comme la limite d'échelle d'une marche aléatoire.

1 Simulation de trajectoires browniennes

On proposera ici différentes manières de simuler des trajectoires browniennes en utilisant les propriétés du mouvement Brownien.

Exercice 1 (Marche aléatoire à pas gaussiens)**.** Soit $h > 0$.

1. Montrer que $(B_0, B_h, B_{2h}, \cdots)$ est une marche aléatoire discrète dont on précisera la loi.
2. En déduire une méthode de simulation d'une trajectoire Brownienne sur l'intervalle $[0, 1]$ avec pas fixé h.
3. Construire une fonction `mouvementBrownien(t,h)` renvoyant la trajectoire d'un mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, t]$ de pas h.
4. Tracer le graphe d'un mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, 1]$.
5. On simule une trajectoire Brownienne sur l'intervalle $[0, 100]$, tracer $t \mapsto tB_{1/t}$ et vérifier que ce processus a la loi d'un mouvement Brownien.

Cette méthode fonctionne particulièrement bien sur les processus gaussiens markoviens, comme le mouvement Brownien branchant ou le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = -X_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

On pourra $(\star)$ proposer une méthode de simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Exercice 2 (Processus gaussien centré)**.** Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

1. Montrer que $(B_{t_1}, \ldots B_{t_n})$ est un vecteur gaussien dont on déterminera la matrice de covariance.
2. En déduire une méthode de simulation d'une trajectoire brownienne sur l'intervalle $[0, 1]$ grâce à la méthode de Cholesky.
3. Construire une fonction `mouvementBrownien2(t,h)` renvoyant la trajectoire d'un mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, t]$ de pas h.
4. Grâce à la loi des grands nombres et la génération d'un grand nombre de mouvements browniens indépendants, déterminer $\mathbb{P}(B_s \geq -1, s \leq n)$ pour $1 \leq n \leq 100$. Tracer le graphe de $n \mapsto -\log \mathbb{P}(B_s \geq -1, s \leq n)$ et en déduire le comportement asymptotique de cette quantité.
5. En utilisant le principe de réflexion, calculer cette probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-ce cohérent avec vos observations.

Cette méthode de simulation se généralise simplement à la générations de processus gaussiens plus complexes, comme les mouvements browniens fractionnaires, qui sont des processus gaussiens tels que

$$\mathrm{Cov}(B_\alpha(s) B_\alpha(t)) = \frac{1}{2}(|s|^{2\alpha} + |t|^{2\alpha} - |s - t|^{2\alpha}).$$

On pourra $(\star)$ tracer le graphe de mouvement browniens fractionnaire pour différentes valeurs du paramètre α, et étudier son influence.

Exercice 3 (Construction de Lévy)**.** 1. Montrer que le processus $(B_s - \frac{s}{t}B_t, 0 \leq s \leq t)$ est indépendant de B_t. Ce processus est appelé pont gaussien

2. De façon plus générale, montrer que pour tout $s < t$, le processus $\left(B_u - \left(\frac{B_t - B_s}{t-s}(u-s) + B_s\right), s \leq u \leq t\right)$ est indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$ et $\sigma(B_r, r \geq t)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\sigma(B_{i/2^n}, i \in \mathbb{N})$, la variable aléatoire $B_{(2i+1)/2^{n+1}}$ est indépendante de $\sigma(B_u, u \leq i/2^n)$ et $\sigma(B_u, u \geq (i+1)/2^n)$, et suit une loi qu'on précisera.
4. En déduire une méthode de simulation de trajectoires browniennes. Notez que dans cette situation, il est possible de choisir l'échelle de façon adaptative en fonction des valeurs prises par le mouvement Brownien B, si on souhaite prêter attention à des comportements particuler.
5. Construire une fonction `mouvementBrownien3(t,n)` renvoyant la trajectoire d'un mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, t]$ de pas 2^{-n}. Tracer les étapes successives de simulation de ce processus.
6. Simuler un mouvement Brownien sur $[0, 5]$ conditionné à $\sup_{s \leq 5} |B_s| \leq 1$.

Exercice 4 (Théorème de Donsker)**.** Rappelons que pour toute marche aléatoire (S_n) centrée à variance finie, le processus $(S_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n})$ converge en loi vers le mouvement Brownien.

1. Simuler une trajectoire brownienne comme limite d'échelle d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.
2. Simuler une trajectoire brownienne comme limite d'échelle d'une marche aléatoire à pas exponentiels symétriques.

Exercice 5 (Méthode de Fourier)**.** On pourrait décomposer en séries de Fourier un mouvement Brownien sur $[0, T]$ pour proposer une simulation de ce processus par une suite de fonctions lisses. Toutefois, on se contentera ici de simuler le pont brownien $\beta : s \in [0, 1] \mapsto B_s - sB_1$ par simplicité.

1. Déterminer la loi de $\left(\int_0^1 \sin(k\pi s)\beta_s \mathrm{d}s, k \geq 1\right)$.
2. En déduire que $\beta_s = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sin(k\pi s)}{k\pi}$, où $(Z_k, k \geq 1)$ sont des variables aléatoires normales centrées réduites i.i.d.
3. Construire une fonction simulant une trajectoire de pont Brownien à l'aide d'un développement en séries de Fourier jusqu'à une précision fixée, et tracer cette courbe.
4. En déduire une fonction simulant une trajectoire de mouvement Brownien à partir de ces méthodes.

2 Intégrales browniennes

Il peut être intéressant de simuler des mouvements browniens dans le but de déterminer les lois et moments de quantités dépendant de ces trajectoires, comme les intégrales browniennes.

Exercice 6 (Aire sous la courbe brownienne)**.** 1. Simuler, grâce à la méthode du point moyen, la variable aléatoire $\int_0^1 B_s \mathrm{d}s$.

2. Même question en utilisant la méthode des trapèzes.
3. Déterminer analytiquement la loi de $\int_0^1 B_s \mathrm{d}s$.
4. Vérifier la précision de ces techniques en utilisant les estimateurs des paramètres gaussiens sur un n-échantillon simulé de variables aléatoires de loi $\int_0^1 B_s \mathrm{d}s$.
5. Estimer la densité de la variable aléatoire $\int_0^1 B_s^2 \mathrm{d}s$ par des méthodes numériques.

Exercice 7 (Méthode de Monte-Carlo)**.** Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien, on note $S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$. On souhaite calculer le prix d'un call asiatique, défini par

$$A_T := \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u \mathrm{d}u - K\right)_+\right].$$

On prendra $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $K = 95$.

1. Construire une fonction permettant de simuler une approximation de $\int_0^T S_u du$ par sommes de Riemann, avec des rectangles de largeur 0.01.
2. Calculer A_1 grâce à la méthode de Monte-Carlo en grâce à 10000 simulations de $\int_0^T S_u \mathrm{d}u$.
3. Tracer le graphe de $T \in [0, 2] \mapsto A_T$.