Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Année universitaire 2020–2021

mallein@math.univ-paris13.fr

TP de Processus stochastiques – Modèle de Black-Scholes et réduction de variance

Dans modèle de Black-Scholes, le prix S_t au temps t d'un produit financier est supposé suivre l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

On observe que les solutions de cette équations sont les mouvements browniens géométriques, définis par

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + (r - \sigma^2/2)t\right).$$

($\star$) On peut vérifier que ce processus est bien une solution de l'EDS par formule d'Itô.

Exercice 1 (Réduction de variance par variables antithétiques)**.** Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.

1. Rappeler $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n X_j/n$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^n X_j/n - \mathbb{E}(X_1)\right)$.
2. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour $\mathbb{E}(X)$ basé sur ces estimateurs. Donner un équivalent asymptotique de la taille de cet intervalle de confiance.
3. Application : On cherche à calculer le prix d'une option Call européenne dans le modèle de Black-Scholes, défini par $\mathbb{E}((S_t - K)_+)$. Construisez un programme permettant de calculer un intervalle de confiance pour la moyenne de cette variable aléatoire à partir de la simulation de n copies indépendantes de S_t. On utilisera les valeurs $S_0 = 1, t = 4, K = 3, \sigma = 1$ et $r = 0.1$. Que vaut la variance empirique de $(S_t - K)_+$?
4. On se propose d'améliorer l'algorithme ci-dessus en utilisant la méthode des variables antithétiques. Soit X une variable aléatoire symétrique, et f une fonction croissante, calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(f(X) + f(-X))$.
5. Posons $\psi(x) = S_0 e^{\sigma x + (r-\sigma^2/2)t}$, et soit G une variable aléatoire gaussienne de variance t. Montrer que
$$\mathbb{E}((S_t - K)_+) = \mathbb{E}\left((\psi(G) - K)_+\right) = \frac{\mathbb{E}((\psi(G) - K)_+) + \mathbb{E}((\psi(-G) - K)_+)}{2}.$$
6. Utiliser cette égalité pour construire un deuxième programme permettant de calculer un intervalle de confiance pour la moyenne de $(S_t - K)_+$. Comparer la performance de ces deux algorithmes.

Exercice 2 (Réduction de variance par changement de loi)**.** Soit X une variable aléatoire ayant la densité ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Soit g une fonction positive telle que $\mathbb{E}(g(X)) = 1$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y telle que pour toute fonction mesurable bornée f, on a $\mathbb{E}(f(Y)) = \mathbb{E}(f(X)g(X))$. Déterminer la densité de g.
2. Soit f une fonction continue bornée, on cherche à déterminer $\mathbb{E}(f(X))$ grâce à des variables aléatoires tirées selon la loi Y. Montrer que
$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y)/g(Y)),$$
et déterminer la valeur de $\mathbb{V}\mathrm{ar}(f(Y)/g(Y))$.
3. Déterminer la fonction g positive telle que $\mathbb{E}(g(X)) = 1$ telle que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(f(Y)/g(Y))$ est minimale pour la fonction Y construite avec g.
4. Soit G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{E}(f(G)) = \mathbb{E}(f(G + a)e^{-aG - a^2/2}).$$
5. Grâce à cette observation, proposez un algorithme permettant de calculer $\mathbb{E}((G - 10)_+)$. Comparez cet algorithme à l'algorithme de Monte-Carlo « naïf ».

Exercice 3 (Réduction de variance par variable de contrôle)**.** Soit (X, Y) une paire de variables aléatoires de variance finie. On suppose $\mathbb{E}(Y) = 0$, et on pose $\rho = \mathrm{Cov}(X, Y)$.

1. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X + cY) = \mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la valeur de c pour laquelle $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + cY) = 0$.
3. On souhaite calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo appliquée à l'estimation de $\mathbb{E}(X)$, où $X = \frac{1}{1+U}$. On utilisera la variable de contrôle $Y = U - 1/2$. Déterminer la valeur de c telle que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + cY)$ est minimal.
4. Comparez les intervalles de confiance obtenus en utilisant la méthode de Monte-Carlo pour déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X + cY)$.
5. Construisez un algorithme utilisant une valeur de c déterminer à partir des variances empiriques et de la covariance empirique de $(X_j, Y_j)_{j \leq n}$ pour fournir l'estimation la plus précise possible de $\mathbb{E}(X)$ (en supposant donc que les calculs explicites de $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ sont impossibles).

Exercice 4 (Formule d'Itô $(\star)$)**.** On rappelle que pour une semi-martingale, on a

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}B_s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n H_{ti/n}(B_{t(i+1)/n} - B_{ti/n})$$

1. Soit B un mouvement Brownien, identifier le processus $B_t^2 - 2\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$.
2. Simuler un mouvement Brownien, et vérifier ce résultat en tranҫant une approximation du processus $B_t^2 - \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$.
3. Simuler des mouvements browniens fractionnaires B^α pour différentes valeurs de $\alpha \in [0, 1]$. Montrer par des simultations que $B_t^\alpha - 2\int_0^t B_s^\alpha \mathrm{d}B_s^\alpha$ est nul pour $\alpha > 1/2$, croît linéairement pour $1/3 < \alpha < 1/2$, et ne converge pas pour $\alpha < 1/3$.