Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Année universitaire 2020–2021

MACS2 – Processus stochastiques
mallein@math.univ-paris13.fr

Devoir maison de Processus stochastiques – À rendre le 23/04/2021

Exercice 1 (Prix d'une option barrière)**.** On rappelle que dans le modèle de Black-Scholes, le prix S_t au temps t d'un produit financier est supposé suivre l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

On observe que les solutions de cette équations sont les mouvements browniens géométriques, définis par

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + (r - \sigma^2/2)t\right).$$

1. En utilisant la formule d'Itô, montrer que (S_t) est une solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessus.
2. On souhaite déterminer le prix d'une option Barrière, de maturité T et strike K, définie par

$$\pi_T = e^{-rT}\mathbb{E}\left((S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t\in[0,T]} S_t > B\}}\right).$$

   Applications numériques : $T = 5$, $r = 0.05$, $\sigma = 2$, $S_0 = 100$, $K = 95$, $B = 105$.
   (a) Construisez une fonction `simulerBrownien` permettant de simuler un mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, T]$ avec n pas. La fonction prend en entrée deux paramètres `T` et `n`, et renvoie la liste des valeurs W_0, $W_{T/n}$, $W_{2T/n}$, ..., W_T.
   (b) Grâce à la méthode de Monte-Carlo et la fonction précédente, construisez une fonction `prixBarriere` prenant en entrée les paramètres r, σ, S_0, K, B, n et T et renvoyant une estimation de π_T ainsi que la largeur de l'intervalle de confiance à 95% sur cette valeur.
   (c) Construisez une fonction `prixBarriereMaturite` prenant en entrée les paramètres r, σ, S_0, K, B, n et T et renvoyant la liste $\pi_{T/n}, \pi_{2T/n}, \ldots, \pi_T$ estimés. Tracez le graphe de $t \mapsto \pi_t$.
   (d) En observant que $(-W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, proposez une méthode de réduction de variance basée sur les variables antithétiques. Comparez l'efficacité de cet algorithme à celle de `prixBarriere`.
3. On s'intéresse maintenant au prix d'une option Barrière asiatique, définie par

$$\bar{\pi}_T = e^{-rT}\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u \mathrm{d}u - K\right)_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t\in[0,T]} S_t > B\}}\right).$$

   Avec les mêmes valeurs numériques que dans la question précédentes, estimez la valeur de $\bar{\pi}_1$, ... $\bar{\pi}_5$. Vous prendrez toutes les initiatives que vous jugerez pertinentes ou nécessaires, les bonnes idées seront récompensées par des points bonus.

Exercice 2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^2$, on considère la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = -\lambda \mathbf{1}_{\{X_t>0\}}\mathrm{d}t + \mu \mathbf{1}_{\{X_t>0\}} + \mathrm{d}W_t,$$

avec $X_0 = 0$.

1. Construisez une fonction permettant de simuler une approximation de la trajectoire du processus X_t. On utilisera l'approximation en éléments finis suivante, pour h assez petit

$$X_{t+h} \approx \begin{cases} X_t - \lambda X_t + (W_{t+h} - W_t) & \text{si } X_t > 0 \\ X_t + \mu X_t + (W_{t+h} - W_t) & \text{si } X_t < 0. \end{cases}$$

2. Construisez une fonction permettant d'estimer la probabilité que $\sup_{s\leq 5} |X_s| \leq 1$.
3. Utilisez cette fonction pour tracer le graphe de la fonction qui à $\mu \in [0, 10]$ associe $-\log \mathbb{P}(\sup_{s\leq 5} |X_s| \leq 1)$, avec $\lambda = 1$. Que pouvez-vous dire de l'allure de cette fonction. Pouvez-vous expliquer ce résultat ?