Fiche 1 – Chaînes de Markov

Préliminaires : révisions de probabilités

Exercice 1. Soit $p \in [0,1]$ et $\lambda > 0$. Soit $X_1,X_2,\dots$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi de Bernouilli de paramètre p, et N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de $X_1,X_2,\dots$. On définit la variable

$$Z = X_1 + \cdots + X_N = \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{n \le N\}} X_n.$$

1. Pour tous $k,n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Z = k,\, N = n)$.
2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z = k)$. Quelle est la loi de Z ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[Z \mid N = n]$. En déduire $\mathbb{E}[Z]$ sans utiliser la question précédente.

Exercice 2. On dispose d'une pièce de monnaie biaisée : elle tombe sur pile avec probabilité $p \neq 1/2$. On souhaite utiliser cette pièce pour obtenir un résultat non biaisé. Pour cela, on groupe les lancers par 2 ; tant que les deux lancers donnent le même résultats, on relance ; dès qu'on a deux résultats différents, le dernier lancer est non biaisé. Formalisons cela. Soit $p \in]0,1[$. On note $X_1,X_2,\dots$ des v.a. de Bernoulli de paramètre p, et on définit

$$N = \min\{n \ge 1 \mid X_{2n-1} \neq X_{2n}\}.$$

Quelle est la loi de N ? Calculer, pour tout n, $\mathbb{P}(N = n,\, X_{2N} = 1)$, en déduire que N et X_{2N} sont indépendants et donner la loi de X_{2N}. Combien faut-il faire de lancers, en moyenne ?

Définition, modélisation, propriété de Markov

Exercice 3 – *Météo.* À partir d'observations, un météorologue choisit de représenter le comportement journalier du temps par une chaîne de Markov à trois états : $E = \{\text{beau},\text{nuageux},\text{couvert}\}$, de matrice de transition donnée ci-dessous, en numérotant 1,2 et 3 les états beau, nuageux, et couvert respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Il fait beau aujourd'hui.
1. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert dans 2 jours ?
2. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert dans 2 jours et nuageux dans 4 jours ?
3. Sachant qu'il fera beau après-demain, quelle est la probabilité qu'il fasse beau demain aussi ?

Exercice 4 – *Critère algorithmique.* Soit E un ensemble dénombrable, et $x \in E$. Soit $(U_n)_{n\ge 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans un ensemble F, et $f : E \times F \to E$ une fonction mesurable. On définit la suite $(X_n)_{n\ge 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E par récurrence par $X_0 = x$ et, pour tout $n \ge 0$, $X_{n+1} = f(X_n,U_n)$.
1. Montrer que $(X_n)_{n\ge 0}$ est une chaîne de Markov homogène, et préciser sa matrice de transition.
2. On considère une suite $(Z_n)_{n\ge 0}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $\{1,2,3\}$. À l'aide de la première question, montrer que les suites $(S_n)_{n\ge 0}$ et $(M_n)_{n\ge 0}$ sont des chaînes de Markov, où

$$S_n = Z_1 + \cdots + Z_n, \quad \text{et} \quad M_n = \max(0,Z_1,\dots,Z_n),$$

et préciser leurs probabilités de transition.
3. Réciproquement, montrer que si $(Y_n)_{n\ge 0}$ est une chaine de Markov sur E issue de x, alors il existe une fonction mesurable $f : E \times [0,1] \to E$ telle que la suite définie par récurrence par $\tilde{Y}_0 = x$ et $\tilde{Y}_{n+1} = f(\tilde{Y}_n, V_n)$, avec $(V_n)_{n\ge 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, a même loi que $(Y_n)_{n\ge 0}$.

Exercice 5 – ***Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.*** On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$, de matrice de transition P telle que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x,x+1) = \frac{1}{2} = P(x,x-1)$, et on cherche à évaluer les quantités suivantes :

$$\text{pour } x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < \infty), \quad g(x) = \mathbb{E}_x[T_0],$$

où $T_0 = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est le temps d'atteinte de 0.
1. Que valent $f(0)$ et $g(0)$?
2. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Appliquer la propriété de Markov à $\mathbb{P}_x(X_1 = x+1, T_0 < \infty)$ et $\mathbb{P}_x(X_1 = x-1, T_0 < \infty)$.
3. En déduire une relation entre $f(x)$, $f(x-1)$ et $f(x+1)$.
4. Conclure que f est affine sur $\mathbb{N}$ et en déduire sa valeur. Que peut-on donc dire de T_0 ?
5. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Appliquer la propriété de Markov simple à $\mathbb{E}_x[T_0 \mathbf{1}_{\{X_1 = x+1\}}]$ et $\mathbb{E}_x[T_0 \mathbf{1}_{\{X_1 = x-1\}}]$.
6. En déduire une relation entre $g(x)$, $g(x-1)$ et $g(x+1)$.
7. Quelles sont les suites réelles solutions de cette relation, sur $\mathbb{N}$? (NB. $h(x) = -x^2$ est solution particulière)
8. En déduire la valeur de $g(x)$.

Exercice 6 – ***Modèle de Wright-Fisher.*** Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \{1, \ldots, N-1\}$. On définit une suite aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{0,1,\ldots,N\}$ de la façon suivante : $X_0 = x$ et, pour tout $n \geq 0$, X_{n+1} est le nombre de boules rouges obtenues en tirant N boules avec remise dans une urne qui contient X_n boules rouges et $N - X_n$ boules noires.
1. Justifier que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov, donner ses probabilités de transition $P(i,j)$.
2. Pour tout $n \geq 0$ et $y \in \{0, \ldots, N\}$, calculer $\mathbb{E}_x[X_{n+1} \,|\, X_n = y]$. En déduire $\mathbb{E}_x[X_n]$ pour tout $n \geq 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_x(\forall m \geq n, X_m = 0 \,|\, X_n = 0) = 1$$

et écrire une propriété similaire pour l'état N.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_x(X_1 \notin \{0,N\}, \ldots, X_n \notin \{0,N\}) \leq c^n,$$

où $c = \max_{1\leq i\leq N-1} \mathbb{P}_i(X_1 \notin \{0,N\})$. En déduire que $\mathbb{P}_x(T_{\{0,N\}} > n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $T_{\{0,N\}} < \infty$ p.s..
5. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. X_∞, et préciser les valeurs que peut prendre X_∞.
6. En calculant $\mathbb{E}_x[X_\infty]$ de deux façons différentes (penser à la question 2), donner la loi de X_∞.

Classification des états, récurrence et transience, absorption

Exercice 7. Pour les chaînes des Markov suivantes, donner une classification des états. Calculer le cas échéant les probabilités d'absorption.

1. $E = \{1,2,3\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2. $E = \{1,2,3,4\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. $E = \{1,2,3,4\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit une chaîne de Markov sur $E = \{0,1,2\}$ telle que

$$\mathbb{P}_0(X_1 = 0) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1) = \tfrac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}_1(X_1 = 0) = \mathbb{P}_1(X_1 = 2) = \tfrac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}_2(X_1 = 2) = 1.$$

1. Donner le schéma de la matrice de transition de la chaîne. Classifier les états.
2. Déterminer la loi du temps $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 | X_n = 0\}$, partant de 0, 1 et 2.
3. Quelle est la loi de $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1\}$, partant de 1 ?

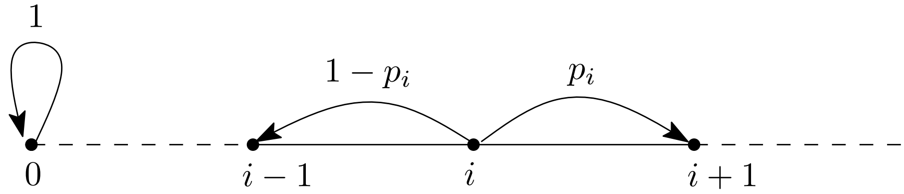
Exercice 9. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Classifier les états.
2. Déterminer la probabilité d'absorption dans les diverses classes récurrentes si la chaîne part d'un état transient.

Exercice 10 – ***Défauts de fabrication.*** La fabrication d'une pièce nécessite trois étapes successives, notées 1,2 et 3. Après chaque étape i, elle est testée et, selon qu'elle est jugée bonne (probabilité p_i), légèrement défectueuse (probabilité q_i) ou irrécupérable (probabilité r_i), elle passe à l'étape $i+1$ (l'état 4 représentant celui de la pièce achevée), repasse l'étape i ou est jetée (état 5). On suppose que, pour $i = 1,2,3$, on a $p_i, q_i, r_i > 0$ et bien entendu $p_i + q_i + r_i = 1$.
1. On note X_n l'état d'une pièce au temps n. Justifier que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.
2. Représenter le graphe associé à cette chaîne et classer les états.
3. Déterminer les probabilités d'absorption et donner leur interprétation dans le modèle.

Exercice 11 – ***Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ absorbée en 0.*** Étant donnée une suite de réels $(p_i)_{i\geq 1}$ dans $]0,1[$, on définit une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont données par la figure suivante :



1. Classer les états. Quels comportements asymptotiques peut-on imaginer pour X_n ?
2. Si on avait $p(0,1) > 0$, pourrait-on faire la classification sans connaître les p_i ?

Probabilité invariante, périodicité, théorèmes limites

Exercice 12. On considère sur $E = \{0,1,2\}$ la chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Décrire la nature de la chaîne. Existe-t-il une probabilité invariante ? Que vaut $\lim_n Q^n(1,1)$?

Exercice 13. Pour les chaînes de Markov suivantes, montrer qu'elles sont récurrentes irréductibles, déterminer leur période et leur probabilité invariante.
1. $E = \{0,1,2\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $E = \{0,1,2,3,4\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 – ***Météo (suite).*** On reprend l'énoncé de l'exercice 3.
1. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique. Calculer la probabilité stationnaire de cette chaîne.
2. Quelle est la proportion de belles journées (calculée sur une longue période de temps) ?

Exercice 15. Soit $p \in]0,1[$. On note $(X_n)_n$ la chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1 | X_0 = k) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = k).$$

1. Calculer la loi du temps de retour τ_0 sous $\mathbb{P}_0$.
2. Montrer que la chaîne est irréductible et récurrente. Est-elle récurrente positive ?
3. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante π pour cette chaîne et la calculer. À l'aide de la question 1, trouver différemment $\pi(0)$.

Exercice 16. On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'elle est irréductible et récurrente.
2. Quelle est sa probabilité invariante ?
3. Quelles sont les limites p.s. de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$ lorsque $n \to \infty$?

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition P donnée par

$$\begin{cases} P(x,x+1) = p & P(x,x-1) = q \quad \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ P(0,0) = \alpha & P(0,1) = 1-\alpha. \end{cases}$$

où $p + q = 1$ et $0 < p < 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$.
1. Spécifier la ou les classes de communication (attention au cas $\alpha = 1$). Étudier la périodicité des états.
On suppose $\alpha < 1$.
2. Démontrer par le calcul l'existence d'une mesure invariante ν. Étudier suivant la valeur de p le problème d'existence et d'unicité d'une probabilité invariante. En déduire, pour $p < q$, la nature des états.
3. Soit a,b des entiers tels que $0 \leq a < b$. On note, pour tout $x \in \{a, \ldots, b\}$,

$$f_{a,b}(x) = \mathbb{P}_x(T_b < T_a).$$

3.a) Trouver une relation de récurrence pour $f_{a,b}$, et en déduire les expressions suivantes : si $p \neq q$,

$$f_{a,b}(x) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^b}$$

et si $p = q (= 1/2)$,

$$f_{a,b}(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

3.b) En déduire la valeur de $f(x) = f_{0,\infty}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_0 = \infty)$ quand $p \geq q$, et conclure quant à la nature de la chaîne de Markov. *On pourra justifier que* $f(x) = \lim_{b\to\infty} f_{0,b}(x)$.
4. Dans le cas où $p < q$, justifier la convergence presque-sûre sous $\mathbb{P}_x$ de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(-aX_i)$$

pour $a > 0$ quelconque.
On suppose $\alpha = 1$.
5. Quelle est la nature des états ?
6. Soit $x,y \in \mathbb{N}$. Que dire de la convergence de la suite de terme général $P^n(x,y)$? Préciser, s'il y a lieu, sa limite.

Exercice 18 – ***Urne d'Ehrenfest.*** On considère l'expérience suivante : N molécules de gaz sont distribuées dans deux récipients A et B, reliés par une ouverture de très petite taille. On la modélise par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n est le nombre de molécules présentes en A après que n molécules ont traversé l'ouverture dans un sens ou l'autre, en supposant que la molécule qui traverse est choisie uniformément parmi les N molécules présentes. NB. Pour un récipient ayant un volume d'un litre, N est de l'ordre de 10^{22}.

1. Expliciter la matrice de transition. Classer ses états.

2. En déduire que, presque sûrement, quelle que soit la configuration initiale, après un temps fini toutes les molécules vont être en B. Notre modèle paraît-il réaliste ?

3. Démontrer que la loi binomiale de paramètres N et $1/2$ est invariante.

4. Si, initialement, toutes les molécules sont en B, quel est le temps moyen avant que ceci se produise à nouveau ? En déduire une minoration (simple) du temps moyen pour que le compartiment A se vide si initialement les compartiments contiennent chacun autant de molécules.

5. Inversement, on s'intéresse maintenant au temps moyen de "remplissage" $\mathbb{E}_0[T_{N/2}]$ (en supposant N pair).

5.a) Par la propriété de Markov faible et la propriété de Markov forte, montrer que, pour $1 \leq k < N/2$,

$$\mathbb{E}_k[T_{k+1}] = \left(1 - \frac{k}{N}\right) + \frac{k}{N}\mathbb{E}_{k-1}[T_{k+1}] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}_{k-1}[T_{k+1}] = \mathbb{E}_{k-1}[T_k] + \mathbb{E}_k[T_{k+1}].$$

5.b) En déduire une relation entre $\mathbb{E}_k[T_{k+1}]$ et $\mathbb{E}_{k-1}[T_k]$.

5.c) Montrer par récurrence que, pour $0 \leq k < \frac{N}{2}$, $\mathbb{E}_k[T_{k+1}] \leq \frac{N}{N-2k}$.

5.d) En déduire une majoration de $\mathbb{E}_0[T_{N/2}]$, et en donner un équivalent quand $N \to \infty$.