Fiche 2 – Espérance (et loi) conditionnelle

Premières propriétés

Exercice 1. On se donne un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, des variables aléatoire X,Y positives (resp. intégrables) et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une tribu.
1. Rappelez la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$.
2. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$;
b) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$. En déduire $\mathbb{E}[c \,|\, \mathcal{G}]$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante ;
c) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et positive (resp. bornée), alors $\mathbb{E}[XY \,|\, \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$;
d) Si $Y \geq X$ p.s., alors $\mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$ p.s.
e) $\mathbb{E}[X + Y \,|\, \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{G}]$

3. Si X et Y sont des v.a. réelles indépendantes, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \,|\, X] = g(X)$$

où on a défini la fonction $g : x \mapsto \mathbb{E}[f(x,Y)]$.
Autrement dit, ceci montre que si X et Y sont indépendantes alors on calcule $\mathbb{E}[f(X,Y) \,|\, X]$ en faisant comme si X était une constante et en prenant l'espérance par rapport à Y seulement. C'est à rapprocher de la formule de Fubini.

Exercice 2. Soit X,Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Calculer $\mathbb{E}[XY^2 \,|\, X]$, $\mathbb{E}[(X+Y)^2 \,|\, X]$, $\mathbb{E}[e^{-XY} \,|\, X]$, $\mathbb{E}[e^{-XY} \,|\, X,Y]$.
On donne $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}] = e^{\lambda^2/2}$ (Pour les rapides : comment obtient-on cette formule ?)

Exercice 3. Soit $X_1,X_2,\dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, intégrables. On note $m = \mathbb{E}[X_i]$ et, pour $n \geq 0$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $n \geq 1$. Que valent $\mathbb{E}[S_n \,|\, X_1]$ et $\mathbb{E}[S_{n+1} \,|\, S_n]$? Justifier que $\mathbb{E}[X_1 \,|\, S_n] = \mathbb{E}[X_2 \,|\, S_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n \,|\, S_n]$ et en déduire $\mathbb{E}[X_1 \,|\, S_n]$.

Lois discrètes

Exercice 4. Soit X,Y des variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ et μ.
1. Calculer la loi de $X + Y$. Quelle est la loi du couple $(X, X + Y)$?
2. Calculer la loi de X sachant $Z = X + Y$. Quel nom porte-t-elle ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X \,|\, X + Y]$

Exercice 5. Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Calculer $\mathbb{E}[S_n \,|\, X_1]$.
2. Calculer la loi de $(X_1,\dots,X_n)$ conditionnellement à S_n.
3. Calculer la loi de X_1 conditionnellement à S_n.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_1 \,|\, S_n]$.

Lois à densité

Exercice 6. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité

$$f(x,y) = \lambda x^{-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}}.$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Calculer $\mathbb{E}[Y^2 \,|\, X]$.

Exercice 7. Soit $X{,}Y$ deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.
1. Vérifier que $\mathbb{E}[X\varphi(X^2)] = 0$ pour toute fonction borélienne bornée φ (penser à la symétrie $x \mapsto -x$). En déduire $\mathbb{E}[X \mid X^2]$. Que vaut $\mathbb{E}[X \mid X^3]$?
2. Calculer $\mathbb{E}[X \mid \operatorname{sgn}(X)]$, où $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
3. On pose $Z = X + Y$.
3.a) Calculer la densité de la loi du vecteur $(X{,}Z)$.
3.b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Z = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
3.c) En déduire $\mathbb{E}[X \mid Z]$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer

1. $\mathbb{E}(X \mid X > 1)$;
2. $\mathbb{E}(X \mid \mathbf{1}_{\{X>1\}})$;
3. $\mathbb{E}(X \mid \min(X{,}1))$.

Exercice 9. Soit Y une variables aléatoire de densité

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

On suppose que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi gaussienne $\mathcal{N}(0{,}1/(2Y))$.
1. Calculer la loi du couple $(X{,}Y)$.
2. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X^2 Y]$.