Fiche 4 – Vecteurs gaussiens

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1. On pose $U = \frac{X+Y}{2}$ et $V = \frac{X-Y}{2}$. Montrer que (U,V) est un vecteur gaussien, et déterminer sa loi.
2. On pose $W = \frac{1}{2}(X-U)^2 + \frac{1}{2}(Y-U)^2$, montrer que U et W sont indépendantes et déterminer la loi de W.

Exercice 2. Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et ε une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$, indépendante de X.
1. Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$?
2. Calculer la matrice de covariance de (X,Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ? *Par exemple, comparer* $\mathbb{E}[X^2Y^2]$ *à* $\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$ *; on peut faire autrement.*
4. Le couple (X,Y) est-il un vecteur gaussien ?

Exercice 3. Soit X un vecteur gaussien centré, de covariance Γ sur $\mathbb{R}^d$.
1. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, quelle est la loi de $\langle u, X\rangle$?
2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, quelle est la matrice de covariance de AX ?
3. Montrer que $\mathbb{E}[\|X\|^2] = \mathrm{trace}(\Gamma)$.

Exercice 4. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 5. Soit $\rho \in]-1,1[$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur de loi $\mathcal{N}(0,\Sigma_\rho)$, où $\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer la densité de (X,Y).
2. Déterminer $\mathbb{E}(Y|X)$.
3. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y - \mathbb{E}(Y|X))$.

Exercice 6. Soit (X,Y,Z) un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(Z) = 1$, $\mathrm{Cov}(X,Z) = 1/2$ et $X+Y$ est indépendant de (Y,Z). En déduire la matrice de covariance Γ de (X,Y,Z). Est-elle inversible ? Trouver une relation linéaire entre X,Y,Z.

Exercice 7. Soit $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ de loi $\mathcal{N}(0,I_d)$.
1. Soit $u,v \in \mathbb{R}^d$. On définit $U = \langle u, Z\rangle$ et $V = \langle v, Z\rangle$.
1.a) Montrer que $\mathrm{Cov}(U,V) = \langle u, v\rangle$. Donner la matrice de covariance de (U,V).
1.b) Montrer que $\mathbb{E}[U \mid V] = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} V$.
2. Soit $A,B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On définit $U = AZ$ et $V = BZ$. Donner (par blocs) la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.
3. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, et $F = E^\perp$ son orthogonal. Montrer que les projections orthogonales $U = P_E(Z)$ et $V = P_F(Z)$ sont indépendantes.

Exercice 8 – *Moyenne et variance empiriques.* Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d., suivant une loi normale. On définit

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \qquad \text{et} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

1. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, \overline{X}_n)$.
2. En déduire que $\overline{X}_n$ et $Z = (X_1 - \overline{X}_n, \dots, X_n - \overline{X}_n)^T$ sont indépendantes. Conclure que $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes.

Exercice 9. Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(0,\Gamma)$. On note $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de Γ, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Soit $d < n$ et H un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. On note p_H la projection orthogonale sur le s.e.v. H.
1. Exprimez $\mathbb{E}(\|X\|_2^2)$ en termes de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminez une expression de $\mathbb{E}(\|p_H(X)\|_2^2)$, et en déduire une formule pour $\mathbb{E}(\|X - p_H(X)\|_2^2)$.
2. Quel s.e.v. de dimension d minimise la valeur de $\mathbb{E}(\|X - p_H(X)\|_2^2)$? Cette observation est à la base de l'Analyse en Composantes Principales.