Bastien Mallein
mallein@math.univ-paris13.fr

Devoir 1 : Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1. Soit $\theta > 0$, on étudie l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ty' - \theta y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle

$$y' - \frac{\theta}{t} y = 0. \tag{2}$$

2. On suppose $\theta < 1$.
   (a) Soit y la solution du problème de Cauchy $y' - \frac{\theta}{t} y = 0$, $y(1) = 1$. Montrer que $\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty$.
   (b) En déduire que pour $\theta < 1$, la fonction nulle est seule solution de (1) sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose maintenant que $\theta = 1$, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy $ty' - y = 0$, $y(0) = a$.
4. On suppose maintenant $\theta > 1$, montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) forme un espace vectoriel de dimension 2 dont on déterminera une base.

Exercice 2. On étudie, pour $a \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + ty^2 = -t \\ y(0) = a \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution de cette équation différentielle sur un intervalle maximal.
2. Soit y une solution de cette équation différentielle, déterminer une expression de la dérivée de $\mathrm{Arctan}(y(t))$ en fonction de t.
3. En déduire la solution de cette équation différentielle (ne pas oublier l'ensemble de définition).

Exercice 3. On étudie l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y' = y - y^2. \tag{3}$$

1. Déterminer l'ensemble des points d'équilibres de cette équation différentielle.
2. Tracer le diagramme de phase et déterminer les points d'équilibre stables et instables.
3. Montrer que pour tout $x \in (0, 1)$, on a $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$.
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (3) telle que $y(0) = 1/2$. On justifiera précisément l'unicité de cette solution.
5. Quelle est la limite de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$? Et lorsque $t \to -\infty$?
6. Déterminer un équivalent de $1 - y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soient x_1, x_2 les solutions des équations différentielle linéaires

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_1(0) = A \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = 2x_2 \\ x_2(0) = B \end{cases},$$

avec A, B deux constantes positives.

1. On note $R(t) = \frac{x_1(t)+2x_2(t)}{x_1(t)+x_2(t)}$. Montrer que
$$R'(t) = \frac{x_1(t)x_2(t)}{(x_1(t)+x_2(t))^2}.$$
2. En déduire que R est une fonction croissante.
3. Résoudre les équations différentielles associées à x_1 et x_2.
4. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} R_t$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer la solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' - \tan(t)y = y^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

1. On pose $z(t) = \frac{1}{y(t)}$. Montrer que z est solution de l'équation différentielle
$$z' + \tan(t)z = 1.$$
2. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
3. En déduire la solution du problème de Cauchy en y.

Exercice 6 (Exercice bonus)**. Attention, ne pas faire cet exercice avant d'avoir essayé tous les autres.**

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = \sin(y(t) - t^2) + 2t. \tag{4}$$

1. Montrer que $t \mapsto t^2$ est l'unique solution de (4) avec condition initiale $y(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y_k(t) = t^2 + k\pi$ est une solution de (4).
3. Soit z la solution de (4) satisfaisant $z(0) = 1$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{z(t)}{t^2} = 1$.