Licence 3 MAEF, Semestre 5 *Université Paris 13*
Équations et systèmes différentiels 2017/2018

Examen : Équations et systèmes différentiels

La calculatrice n'est pas autorisée.
Une feuille de notes A4 recto-verso nominative est autorisée.

Exercice 1. On rappelle que

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + \tanh(t)y = y^2 \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation (1).
2. On pose $z(t) = \frac{1}{y(t)}$. Montrer que z est solution de l'équation différentielle
$$z' - \tanh(t)z = -1. \tag{2}$$
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
4. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto 2\mathrm{Arctan}(\tanh(t/2))$, et l'exprimer en fonction de $\cosh(t)$.
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (2).
6. Donner la solution y de l'équation (1).

Exercice 2. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, et on considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, et montrer que $P(1) = 0$.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. On note e_1 un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_1, e_2 un vecteur propre associé à la deuxième plus grande valeur propre λ_2, et e_3 un vecteur propre associé à la troisième valeur propre λ_3. Déterminer e_1, e_2 et e_3.
4. Vérifier par un calcul direct que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ et $Ae_3 = \lambda_3 e_3$.
5. Calculer la matrice de passage P ainsi que P^{-1} telle que
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
6. Déterminer la solution $X(t)$ du système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ en termes des matrices P, P^{-1} d'une matrice diagonale, et de X_0.
7. On pose $X(0) = ae_1 + be_2 + ce_3$. Exprimer $X(t)$ en fonction de a, b, c et e_1, e_2, e_3.
8. Montrer que si $X(0) = e_3$, alors $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$.
9. Montrer que si $X(0) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ alors $\lim_{t \to -\infty} X(t) = 0$ (attention, c'est la limite quand t tend vers *moins* l'infini).
10. On considère à nouveau $X(0) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.
Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \frac{v(t)}{u(t)}$, $\quad \lim_{t \to +\infty} \frac{w(t)}{u(t)}$.
11. Quelle est la limite de $\frac{X(t)}{||X(t)||}$ quand $t \to +\infty$? Et quand $t \to -\infty$? Même question si $X(0) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Exercice 3. On considère le système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{cases} u'(t) & = -2u(t) - 5v(t) + 10u(t)v(t) \\ v'(t) & = u(t) - 4v(t) - 2u(t)^2 \end{cases}$$

1. Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre de ce système. Est-il stable ou instable ?
2. On pose $E(t) = u(t)^2 + 5v(t)^2$, avec u, v une solution du système. Montrer que l'on a
$$E'(t) = -4u(t)^2 - 40v(t)^2.$$
3. En déduire que $t \mapsto e^{4t}E(t)$ est une fonction décroissante.
4. Montrer que quelle que soit la valeur de $u(0), v(0)$, on a $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$. Conclure que $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de ce système, en justifiant soigneusement.

Exercice 4. On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} u' & = 4u - 5 - v \\ v' & = v + u^2 \end{cases}$$

1. Déterminer les deux points d'équilibres de ce système. On note (u_1, v_1) et (u_2, v_2) ces deux points, avec $u_1 < u_2$.
2. Pour (u_1, v_1) :
   (a) Calculer la matrice A_1 du système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre (la jacobienne prise en le point d'équilibre).
   (b) Déterminer si 0 est un point d'équilibre stable ou instable du système linéarisé. On justifiera rapidement et précisément ce point.
   (c) Conclure sur la stabilité de (u_1, v_1).
3. Pour (u_2, v_2) :
   (a) Calculer la matrice A_2 du système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre (la jacobienne prise en le point d'équilibre).
   (b) Diagonaliser la matrice A_2, en précisant valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice.
   (c) Tracer le diagramme de phase associée au système $X' = A_2X$, en indiquant précisément les sous-espaces propres de A_2, l'évolution des trajectoires le long de cees courbes, ainsi que l'allure d'une solution restant dans chacune des quatre régions restantes du plan.
   (d) Est-ce que (u_2, v_2) est un point d'équilibre stable de A_2 ?

Exercice 5. On introduit la matrice $A(r) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & r \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de r la matrice $A(r)$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$?
2. Existe-t-il r tel que la solution du système $X' = A(r)X$ est une fonction périodique ?
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de r telles que 0 est un point d'équilibre stable pour le système différentiel précédent.