Ratrappage : Équations et systèmes différentiels

La calculatrice n'est pas autorisée.
Une feuille de notes A4 recto-verso nominative est autorisée.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + \tan(t)y(t)\ln(y(t)) = y(t) \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Énoncer le théorème, en vérifiant ses hypothèses d'application, garantissant l'existence d'une unique solution à l'équation (1).
2. On pose $z(t) = \ln(y(t))$. Montrer que z est solution de l'équation différentielle
$$\begin{cases} z'(t) + \tan(t)z(t) = 1, z(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$
3. Déterminer le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(\cos(t))$. En déduire une primitive de la fonction tan.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène $z'(t)+\tan(t)z(t) = 0$.
5. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln \frac{\sin(t)+1}{\cos(t)}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$.
6. En déduire la solutions de l'équation (2), puis la solution y de l'équation (1).

Exercice 2. On considère le système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déteminer la matrice A telle que le système d'équations différentielles linéaires est équivalent au système différentiel $X'(t) = AX(t)$.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont $1 + i$ et $1 - i$.
3. On note e_1 le vecteur propre associé à $1 + i$ dont la deuxième coordonnée est 1, et e_2 le vecteur propre associé à $1 - i$ dont la deuxième coordonnée est 1. Déteminer e_1 et e_2.
4. Déterminer les matrices de passage P et P^{-1} telles que $A = P\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.
5. Déterminer la solution $X(t)$ du système $X'(t) = AX(t)$ avec condition initiale $X(0) = X_0$ en termes des matrices P, P^{-1}, d'une matrice diagonale et de X_0.
6. On pose $X_0 = ae_1 + be_2$, écrire $X(t)$ en fonction de a, b et e_1, e_2.
7. On pose $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$, déterminer les fonctions solutions du système d'équations différentielles $(x(t), y(t))$.
8. Que vaut $\lim_{t\to-\infty} x(t)$? Quel est le comportement de $x(t)$ en $+\infty$?
9. Tracer le diagramme de phase du système différentiel.

Exercice 3. On considère le système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{cases} u'(t) & = -2u(t) - 5v(t) + 10u(t)v(t) \\ v'(t) & = u(t) - 4v(t) - 2u(t)^2 \end{cases}$$

1. Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre de ce système. Est-il stable ou instable ?
2. On pose $E(t) = u(t)^2 + 5v(t)^2$, avec u, v une solution du système. Montrer que l'on a
$$E'(t) = -4u(t)^2 - 40v(t)^2.$$
3. En déduire que la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{4t}E(t)$ est négative.
4. En conclure qu'il existe $\rho \geq 0$ tel que $\lim_{t\to\infty} e^{4t}E(t) = \rho$.
5. Montrer que quelle que soit la valeur de $u(0), v(0)$, on a $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.
6. Conclure que $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de ce système, en justifiant soigneusement.

Exercice 4. On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} u' & = u^2 - 2v + 4 \\ v' & = u - v + 6 \end{cases}$$

1. Déterminer les deux points d'équilibres de ce système. On note (u_1, v_1) et (u_2, v_2) ces deux points, avec $u_1 < u_2$.
2. Pour (u_1, v_1) :
   (a) Calculer la matrice A_1 du système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre (la jacobienne prise en le point d'équilibre).
   (b) Déterminer si 0 est un point d'équilibre stable ou instable du système linéarisé. On justifiera rapidement et précisément ce point.
   (c) Conclure sur la stabilité de (u_1, v_1).
3. Pour (u_2, v_2) :
   (a) Calculer la matrice A_2 du système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre (la jacobienne prise en le point d'équilibre).
   (b) Diagonaliser la matrice A_2, en précisant valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice.
   (c) Tracer le diagramme de phase associée au système $X' = A_2X$, en indiquant précisément les sous-espaces propres de A_2, l'évolution des trajectoires le long de cees courbes, ainsi que l'allure d'une solution restant dans chacune des quatre régions restantes du plan.
   (d) Est-ce que (u_2, v_2) est un point d'équilibre stable de A_2 ?

Exercice 5. On introduit la matrice $A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & r \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe un unique r, que l'on déterminera, tel que la solution du système $X'(t) = A(r)X(t)$ est périodique.
2. Pour quelles valeurs de r la matrice $A(r)$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de r telles que 0 est un point d'équilibre stable pour le système différentiel $X'(t) = A(r)X(t)$.