Contrôle continu n° 2

Durée : **2 heures**.
Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 **5 points**

On dispose de 5 urnes dont 3 de type A et 2 de type B. Chaque urne de type A contient 1 boule rouge et 3 blanches, chaque urne de type B contient 2 rouges et 2 blanches. On choisit au hasard une urne et on tire avec remise 2 boules dans l'urne choisie. Soit U_A l'évènement "l'urne choisie est de type A", U_B l'évènement "l'urne choisie est de type B". Soit X la variable aléatoire qui est le nombre de boules rouges tirées.

1. Calculer $\mathbb{P}(U_A)$, $\mathbb{P}(U_B)$, $\mathbb{P}(X = k \mid U_A)$ et $\mathbb{P}(X = k \mid U_B)$ pour $0 \leq k \leq 2$.
2. En déduire la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Sachant qu'on a tiré une boule rouge une boule blanche, quelle est la probabilité qu'on ait tiré dans une urne de type A ?
4. Les évènements $X = 1$ et U_A sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 **5 points**

On lance n fois une pièce de monnaie, supposons que les lancers sont indépendants et que pour un lancer la probabilité d'obtenir une pile est de 2/5. Soit X_i qui est 1 si on obtient une pile au lancer i, et 0 sinon.

1. Soit $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, calculer $\mathbb{E}(\bar{X})$ et $\mathrm{Var}(\bar{X})$.
2. Quelle loi à densité peut-on utiliser pour approcher celle de $\bar{X}$ quand n est suffisamment grand ? (Préciser les paramètres de la loi.)
3. Calculer $\mathbb{P}(0,325 \leq \bar{X} \leq 0,475)$ avec $n = 100$.
4. Combien de fois faut-il lancer pour que $\bar{X}$ soit dans l'intervalle $[0,325\ ,\ 0,475]$ avec la probabilité au moins égale à 95% ?

Exercice 3 **6 points**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}x(y + 1), & \text{si } x \text{ et } y \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Déterminer une densité de X et une densité de Y.
2. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2)$, $\mathbb{P}(X < 1/2,\ Y > 1/2)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
5. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(XY^2)$.

Exercice 4 **6 points**

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire de loi $N(m, \sigma^2)$, avec $m = 3$, $\sigma = 2$ et $n = 10$.

1. Quelle est la loi de $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$?
2. Calculer $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 4)$ et $\mathbb{P}(-1.84 < \bar{X} < 4.16)$.
3. Supposons désormais que m est inconnu et que les données de l'échantillon sont :

   $$1,35\ ;\ -0,15\ ;\ 4,02\ ;\ 3,56\ ;\ 3,07\ ;\ 0,33\ ;\ 5,25\ ;\ 3,70\ ;\ 2,40\ ;\ 3,05\ .$$

   $$\text{[Simplification de calcul : } \sum_{i=1}^{n} X_i = 26,58; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 96,5278.\text{]}$$

   Déterminer une estimation de m. Quelle est la loi de l'estimateur ? Calculer le risque quadratique de l'estimateur.
4. Déterminer un intervalle de confiance pour m de niveau 95%.
5. Supposons désormais que σ est aussi inconnu, déterminer une estimation de σ^2 ainsi qu'un intervalle de confiance pour m de niveau 95%.