Contrôle continu n° 1

16 novembre 2017

Durée de l'épreuve : **2 heures**.
Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Remarques :

— Tout calcul menant à probabilité strictement supérieure à 1 ou strictement négative *sans aucun commentaire de votre part* donnera lieu à une pénalité d'un point.

— Pour la plupart des questions, si vous ne justifiez pas correctement une réponse (même juste), vous n'aurez aucun point.

— Une copie mal présentée ou dont les résultats sont trop souvent non justifiés ou très mal justifiés se verra pénalisée d'un maximum de 2 points.

— En revanche, il est possible dans certaines questions d'obtenir une partie des points en donnant un début de réponse ou de raisonnement.

— Ce sujet ne comporte aucun piège.

Exercice 1 — 8 points

À la fin de chaque partie d'un jeu vidéo, le joueur doit tuer un super-monstre tiré au hasard de la façon suivante :

— 1 fois sur 10, il s'agit d'un *dragon* ;

— 3 fois sur 10, il s'agit d'un *troll* ;

— le reste du temps, c'est un *géant*.

Lorsque le monstre meurt, le joueur a une chance de gagner un *rubis* :

— le dragon donne toujours un rubis ;

— le troll donne un rubis 1 fois sur 2 ;

— le géant donne un rubis 1 fois sur 5.

On suppose que le jeu est très facile et que les joueurs réussissent toujours à tuer le super-monstre. Des parties différentes sont toujours indépendantes.

Alice fait une partie. On note D (respectivement T, G) l'événement « le super-monstre est un dragon » (respectivement un troll, un géant). On note R l'événement « Alice gagne un rubis » et $p = \mathbb{P}(R)$.

1. Démontrer que $p = 0,37$. **/1,5**
2. Alice a gagné un rubis ! Quelle est la probabilité que le super-monstre ait été un troll ? **/1**
3. Bob décide de faire 6 parties (au lieu de réviser ses cours...). On note S le nombre de rubis qu'il réussit à obtenir.
   a) Quelle est la loi de S ? Quelle est son espérance ? **/1,5**
   b) Quelle est la probabilité que Bob gagne exactement 3 rubis ? **/1**
   c) Quelle est la probabilité que Bob gagne au moins un rubis ? **/0,5**
4. Charlie décide de jouer jusqu'à obtenir un rubis. On note X le nombre de parties que fait Charlie.
   a) Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? **/1,5**
   b) Quelle est la probabilité que Charlie fasse exactement 3 parties ? **/1**

Exercice 2 Loi jointe **4 points**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par la table suivante.

$X \backslash Y$	-1	1
0	$0,2$	$0,4$
1	$0,3$	$0,1$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y. **/1**
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse. **/0,5**
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. **/2,5**

Exercice 3 Fonction de densité **2,5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que f est bien une densité de probabilité. **/1,5**
2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f. **/1**

Exercice 4 Fonction de répartition **5 points**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Justifier que F est bien une fonction de répartition. **/1**
2. Justifier que la loi de probabilité associée à F admet une densité f. **/0,5**
3. Calculer une expression de la densité f. **/1**
4. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2)$. **/0,5**
   b) Calculer $\mathbb{E}[X]$. **/1**
   c) Calculer $\mathbb{V}\text{ar}(X)$. **/1**

Exercice 5 Questions avec Matlab **3,5 points**

Les deux questions suivantes sont totalement indépendantes.

1. Écrire une fonction Matlab `var_emp(V)` qui a pour paramètre un vecteur `V` de nombres de type `double` et qui retourne la variance empirique de `V`, c'est-à-dire le nombre

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m)^2,$$

   où n est le nombre d'éléments de `V`, v_1, v_2, ..., v_n sont ses coefficients, et m est sa moyenne. On pourra utiliser la fonction prédéfinie `numel` qui, appliquée à un tableau, retourne son nombre d'éléments. **/1,5**

2. On lance, de façon indépendante et autant de fois que nécessaire, une pièce de monnaie équilibrée. Soit T la variable aléatoire égale au premier instant où l'on a fait 2 piles à la suite. Par exemple :
   — si les tirages sont face, pile, face, face, pile, pile, alors T vaut 6 ;
   — si les tirages sont face, pile, pile, alors T vaut 3.

   Écrire, en langage Matlab, une fonction `simuler_T()` qui ne prend aucun argument et retourne un nombre aléatoire qui a la même loi que T. **/2**