Bastien Mallein
mallein@math.univ-paris13.fr

TD 1 : Dériver et intégrer
Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 (Pour s'échauffer)**.**

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   — $f : t \mapsto \log(\sin(t))$
   — $g : t \mapsto \exp(\cos(t))$
   — $h : t \mapsto \log(t^2)$
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \epsilon\frac{\pi}{2}$, où ϵ est le signe de x.

Exercice 2 (Pour se mettre en jambes)**.**

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
   — $f : t \mapsto \tan(t)$
   — $g : t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$
   — $h : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$.
2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
   — $f : t \mapsto \log(t)$
   — $g : t \mapsto \arctan(t)$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, on a $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$.
   (b) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x}$.
4. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
   (a) $k : t \mapsto \frac{2t}{3t^2-2t-1}$
   (b) $\ell : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$
   (c) $m : t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$.

Exercice 3 (Quelques équations différentielles linéaires)**.** Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y' + 3y = x^2$
2. $y' + 2xy = 2x$ (la solution particulière est évidente !)
3. $(1 + e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$
4. $(x^2 + x)y' + y + 1 = 0$
5. $(1 + x^2)y' - 2xy = x^3 + x$.

Exercice 4 (Équations différentielles avec recollement)**.** Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $xy' - y = x^2$
2. $x^2y' + y = 1$ (solution particulière évidente !)

Attention : il faut résoudre ces équations sur $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$ séparément, puis recoller les fonctions de telle sorte qu'elles soient continues et dérivables en 0.

Exercice 5 (À l'envers !)**.** Déterminer une équation différentielle linéaire dont l'ensemble des solutions est $\left\{f : x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 6 (Une petite énigme)**.** Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f' + f = f(0) + f(1)$.

Exercice 7 (Application à l'économie : le multiplicateur dynamique)**.** Soit $Y(t)$ le revenu à l'instant t, $C(t)$ la consommation, $0 < c < 1$ la propension marginale à consommer, $\lambda > 0$ un coefficient d'ajustement et $A > 0$ une constante. On suppose que

$$\dot{Y}(t) = \lambda(C(t) - Y(t)) \quad \text{et} \quad C(t) = cY(t) + A.$$

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par Y, et déterminer la solution avec condition initiale $Y(0) = y_0$.
2. Pour quelle valeur de y_0 cette solution est-elle une constante ?
3. Quelle est la limite, quand $t \to +\infty$ de $Y(t)$?

Exercice 8 (Application à la médecine légale : déterminer l'heure du crime)**.** Les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à l'écart entre sa température et celle de l'environnement. Plus formellement, si $x(t)$ est la température du corps au temps t et T celle de l'environnement, on a

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda(x(t) - T),$$

où λ est une constante de refroidissement.

1. Montrer que la solution de cette équation différentielle avec condition initiale $x(0) = x_0$ s'écrit $x(t) = T + (x_0 - T)e^{-\lambda t}$.
2. Vérifier la formule $\lambda(t_1 - t_2) = -\log\left(\frac{x(t_1)-T}{x(t_2)-T}\right)$.
3. Application : Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hôtel climatisée à 20°C. La température du corps est de 24°C. Deux heures plus tard cette température est descendue à 21°C. Trouver l'instant où la personne est décédée, en supposant qu'à cet instant sa température corporelle était de 37°C.
4. Supposons maintenant que la température n'est pas constante mais varie selon un cycle journalier : $T(t) = 20 - 5\cos(2\pi t/24)$, où t est le temps mesuré en heures. Déterminer alors la valeur $x(t)$ de la température du corps au temps t, sachant que $x(0) = 37$°C.