Bastien Mallein
`mallein@math.univ-paris13.fr`

TD 3 : Équations différentielles non-linéaires

Exercice 1 (Existence et unicité)**.** Montrer qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{\sin(ty(t))}{t^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tout t tel que $y(t)$ est défini, on a $y(t) > 0$.

Exercice 2 (Équations différentielles autonomes)**.** Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants

1. $y' = 1 + y^2$, avec $y(0) = a \in \mathbb{R}$,
2. $y' = y^2$, avec $y(0) = a \in \mathbb{R}$.

Pour ces problèmes de Cauchy, déterminer également les intervalles maximals sur lesquels les solutions sont définies, en fonction de a.

Exercice 3 (Flot d'une équation différentielle autonome)**.** Soit y la solution de l'équation différentielle stochastique $y' = e^{-y}$ avec condition initiale $y_0 = 0$.

1. Montrer que l'on a unicité de la solution.
2. Déterminer la fonction $\phi_t : y_0 \mapsto y(t)$.
3. Montrer que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

Exercice 4 (Modèle de Solow ("Prix Nobel" d'économie 1987))**.** Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y' = y^\alpha - \lambda y,$$

avec condition initiale $y(0) > 0$.

1. Déterminer les points d'équilibre de cette équation différentielle.
2. Identifier les points d'équilibre stables et tracer le diagramme de phase.
3. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z = y^{1-\alpha}$.
4. En déduire les solution de l'équation différentielle de Solow, et vérifier les propriétés de stabilité prédites.

Exercice 5 (D'autres équations différentielles non-linéaires autonomes)**.** Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants

1. $y' = -y^3$, avec $y(0) = a \in \mathbb{R}$,
2. $y' = y^2 - y$, avec $y(0) = a \in \mathbb{R}$,
3. $y' = e^y$, avec $y(0) = a \in \mathbb{R}$,
4. $y' = y^{1/3}$, avec $y(0) = 0$.

Pour tous ces problèmes de Cauchy, déterminer l'intervalle I sur lequel les solutions sont définies, et le comportement de la solution lorsque le temps s'approche des bords de l'intervalle.

Exercice 6 (Stabilité-Instabilité)**.** Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des points d'équilibres de l'équation différentielle, la propriété de stabilité de chaque point d'équilibre ainsi que le diagramme de phase.

1. $y' = ay + b$,
2. $y' = \sin(y) + \rho$, (discuter selon la valeur de ρ)
3. $y' = y^2 - y$,
4. $y' = y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$,
5. $y' = -\frac{1}{y} + y - 1$.
6. $y' = \frac{1}{y} + y - 1$.

Exercice 7 (Équations différentielles à variables séparées)**.** Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' = e^{y+t}$,
2. $y' = \cos(y)^2 \sin(t)$
3. $y' = \frac{t}{1+y}$
4. $y' + ty^2 = -t$

Exercice 8 (Poser une équation différentielle)**.** On étudier un système de chasse d'eau fonctionnant de la façon suivante. À chaque instant t, on note $y(t)$ la quantité d'eau présente dans le réservoir, d'une capacité de 10 litres. On part d'un réservoir vide à l'instant 0 ($y(0) = 0$), et on se propose d'étudier le système de remplissage suivant. À chaque instant, le débit entrant est contrôlé en fonction du volume actuel du réservoir. Le débit maximal est de 1l/s. Le réservoir se remplit au débit maximal jusqu'à ce qu'il atteigne 8 litres, puis ensuite le débit à l'instant t est donné par $((10 - y(t))/2)^\alpha$, avec $\alpha \in (0, 2)$ un paramètre à déterminer.

1. Donner le problème de Cauchy satisfait par y.
2. Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème de Cauchy.
3. Résoudre le problème de Cauchy.
4. Quelle est la plus grande valeur de α telle que le réservoir se remplit en temps fini ?
5. Quelle est la plus grande valeur de α telle que le réservoir se remplit en moins de 20s ?

Exercice 9 (Croissance logistique d'une population)**.** On note y la quantité d'individus vivant dans un environnement qui peut en contenir au plus K. On suppose que y satisfait l'équation différentielle

$$y' = y(1 - y/K).$$

1. Déterminer les points d'équilibre de l'équation différentielle.
2. Résoudre l'équation différentielle pour $y_0 \in [0, K]$. Quel est le comportement asymptotique de y ?

Exercice 10 (Changement de variables)**.**

1. Déterminer les solutions de l'équation $yy'' = y'^2 - y^2$ en utilisant la fonction intermédiaire $z = y'/y$.
2. Déterminer les solutions de $(t^2 - y^2 - 1)y' = 2ty$ en utilisant la fonction intermédiaire $z = \frac{y}{t^2+y^2-1}$.

Exercice 11 (Étude qualitative)**.** Soit y la solution maximale de l'équation différentielle $y' = x - e^y$.

1. Montrer que y est décroissante puis croissante.
2. Montrer que y est définie jusqu'en ∞ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
3. Montrer que y est définie sur $]\alpha, +\infty[$ et que $\alpha > -\infty$.

Exercice 12 (Fonctions intégrables)**.**

1. Soit y une solution de $y'(y+1) + 2t = 0$. Montrer que $t \mapsto y^2(t) + 2y(t) + t^2$ est constante, et en déduire les solutions de cette équation différentielle
2. Soit y une solution de $ty' = \frac{\tan(y)}{1+\tan(y)^2}$. Montrer que $t \mapsto \frac{\tan(y)}{t}$ est une constante, et en déduire les solutions de cette équation différentielle.