Bastien Mallein
`mallein@math.univ-paris13.fr`

TD 4 : Systèmes différentiels linéaires

Exercice -1 (Diagonalisation de matrices)**.** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Pour chaque valeur propre, déterminer la base du sous-espace propre associé. Déterminer si la matrice est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$). Si oui déterminer une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 13 & -2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 0 (Sur les matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$)**.** On considère la matrice A_2 de l'exercice précédent. On désigne par λ la valeur propre dont la partie imaginaire est positive.

1. Déterminer un vecteur propre v de A_2 dans $\mathbb{C}^2$ associé à la valeur propre λ dont les composantes sont des entiers (complexes), la première composante étant un entier réel.
2. On pose $u_1 = \mathrm{Re}(v)$ et $u_2 = \mathrm{Im}(v)$, de telle sorte que $v = u_1 + iu_2$. Soit Q la matrice carrée d'ordre 2 dont les colonnes sont respectivement u_1 et u_2. Calculer la matrice E donnée par $Q^{-1}A_2Q$.
3. Refaire cet exercice avec la matrice A_5 de l'exercice 1.

Exercice 1 (Théorie sur les matrices carrées d'ordre 2)**.** Étant donné une matrice carrée d'ordre 2, on considère les cas suivants :

$$\begin{array}{ccc} \det(A) > 0, & \det(A) = 0, & \det(A) < 0, \\ \mathrm{Tr}(A) > 0, & \mathrm{Tr}(A) = 0, & \mathrm{Tr}(A) < 0. \end{array}$$

Dresser un tableau indiquant, pour chacun de ces 9 cas, le signe des deux valeurs propres de A, ou si ces valeurs propres sont complexes le signe de leurs parties réelles.

Exercice 2 (Étude d'un système différentiel)**.** On considère le système différentiel $X' = A_1X$ où A_1 est la matrice définie dans l'exercice -2.

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Déterminer le système d'équations différentielles satisfait par le couple de fonctions (u, v).
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée $T(t)$ telle que $X(t) = T(t)X_0$ pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $T(t)$ et en déduire la solution (u, v) du système différentiel.
3. Vérifier que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a $T(t + s) = T(t)T(s)$.
4. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.
5. Étudier la limite $\lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{u(t)}$.
6. Représenter les solutions dans le plan de phase.
   (a) Tracer en noir les sous-espaces propres de A.
   (b) Indiquer la direction des vecteurs tangents sur ces deux droites.
   (c) Tracer l'allure de courbes suivies par les solutions dans les quatre régions du plan.
   (d) Indiquer la direction suivie par la solution le long de ces courbes.

Exercice 3 (Un autre point de vue sur la stabilité)**.** On considère le même système différentiel $X' = A_1 X$. Aucun résultat de l'exercice précédent n'est admis.

1. Montrer que la forme quadratique $E(u, v) = 13u^2 + 22uv + 16v^2$ vérifie les deux inégalités suivantes : $u^2 + v^2 \leq E(u, v) \leq 26(u^2 + v^2)$.
2. Montrer que $E(u(t), v(t))' = -42(u(t)^2 + v(t)^2)$.
3. En déduire que $E(u(t), v(t))' \leq -\frac{21}{13} E(u(t), v(t))$, et donc que $t \mapsto e^{(21/13)t} E(u(t), v(t))$ est décroissante.
4. Conclure que $\lim_{t\to+\infty} E(u(t), v(t)) = 0$, et donc que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.
5. Comparer cette méthode avec celle de l'exercice précédent.

Exercice 4. On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} u'(t) &= u(t) - 5v(t) \\ v'(t) &= 2u(t) - 5v(t). \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle que $X' = AX$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A, ainsi qu'un vecteur propre e_+ associé à la valeur propre de partie imaginaire positive.
3. On pose $e_+ = e_r + ie_i$, avec e_r, e_i des vecteurs à coordonnées réelles. On pose Q la matrice 2x2 dont les colonnes sont e_r et e_i. Déterminer les matrices Q et Q^{-1}.
4. Déterminer $E = Q^{-1}AQ$. On pose $Y = Q^{-1}X$. Déterminer le système différentiel satisfait par Y.
5. Déterminer la solution de Y. L'exprimer en termes d'une matrice trigonométrique et d'un vecteur arbitraire $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
6. En déduire la solution générale du système $X' = AX$. L'exprimer en termes de la matrice Q, une matrice trigonométrique et un vecteur arbitraire. Puis en termes de combinaison liénaires des vecteurs e_r et e_i.
7. Déterminer la solution du système $X' = AX$ avec condition initiale $X(0) = X_0$ en fonction des matrices Q, Q^{-1} et d'une matrice trigonométrique.
8. Déterminer la matrice T telle que $X(t) = T(t)X_0$. Calculer $T(\pi/2)$, $T(\pi)$, $T(3\pi/2)$, $T(2\pi)$. Montrer que $e^{2t}T(t)$ est périodique, et calculer sa période.
9. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$.
10. Représenter les solutions dans le plan de phase.

Exercice 5. On considère le même système différentiel qu'à l'exercice précédent, en ignorant les résultats.

1. Montrer que la forme quadratique $E(u, v) = 34u^2 - 54uv + 31v^2$ satisfait les deux inégalités $u^2 + v^2 \leq E(u, v) \leq 61(u^2 + v^2)$.
2. Vérifier que $E(u(t), v(t))' = -40(u(t)^2 + v(t)^2)$, en déduire $E(u(t), v(t))' \leq -\frac{40}{61} E(u(t), v(t))$.
3. En conclure que $\lim_{t\to+\infty} e^{\rho t} E(u(t), v(t)) = 0$ pour tout $\rho \leq \rho_0$ que l'on déterminera.
4. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante $y'' + py' + qy = 0$, avec $p, q \in \mathbb{R}$. On pose $x = y'$.

1. Déterminer le système d'équations différentielles du premier ordre satisfaites par le couple (x, y).
2. Déterminer A tel que $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
3. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur p et q pour que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
4. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur p et q pour que
   (a) La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (b) La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
   (c) La matrice A n'est pas diagonalisable.
5. Dans chacun des trois cas ci-dessus, déterminer la solution générale y.