Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

Devoir Maison : Théorie de la mesure
À rendre le 19 novembre 2021

Exercice 1. Soit E un ensemble, un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est une algèbre sur E si

— $E \in \mathcal{A}$:

— si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$

— si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

a) Montrer que $\mathcal{R} = \{B \subset \mathbb{N} : \mathrm{Card}(B) < \infty \text{ ou } \mathrm{Card}(\mathbb{N}\backslash B) < \infty\}$, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ ou des parties dont le complémentaire est fini est une algèbre sur $\mathbb{N}$.

b) Montrer que $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$. En déduire que $\mathcal{R}$ n'est pas une tribu.

c) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E si et seulement si pour toute famille (A_n) d'éléments *deux à deux disjoints* de $\mathcal{A}$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On appelle une mesure σ-additive sur $(E, \mathcal{A})$ une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que

— Pour tout $A_1, \ldots, A_n$ ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on a $\mu(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$.

— Pour toute suite (A_n) d'ensembles deux à deux disjoints tels que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, on a $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

d) Montrer que pour toute suite (A_n) d'ensembles deux à deux disjoints tels que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, on a
$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

e) Montrer que la mesure $\rho : B \in \mathcal{R} \mapsto +\infty \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}(B)=\infty\}}$ est une mesure finiment additive, mais pas σ-additive.

Exercice 2. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la mesure μ est portée par S si $\mu(S^c) = 0$, et que $x \in \Omega$ est un atome ponctuel de μ si $\mu(\{x\}) > 0$. On dit qu'une mesure est diffuse si elle n'a pas d'atome ponctuel, qu'elle est purement atomique si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

a) Montrer que si μ est portée par $\mathbb{N}$, alors elle est purement atomique.

b) Montrer que $\mathrm{Card}(\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 1/n\}) \leq n$, i.e. qu'il y a au plus n atomes ayant une masse supérieure à $1/n$.

c) En déduire que l'ensemble des atomes d'une mesure de probabilité est dénombrable.

d) On note $(x_n, n \in \mathbb{N})$ l'ensemble des atomes de la mesure μ, et $p = \sum_{j=1}^\infty \mu(\{x_j\})$. Montrer que $p \in [0, 1]$, et que μ est atomique si et seulement si $p = 1$.

e) On suppose $p < 1$, et on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\rho(A) = \frac{1}{1-p}\left(\mu(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x_j\})\mathbb{1}_{\{x_j \in A\}}\right).$$

Montrer que ρ est une mesure de probabilité, puis que ρ est diffuse.

f) En déduire que toute mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $p\mu_a + (1-p)\mu_d$, où μ_a est une mesure de probabilité purement atomique, et μ_d une mesure de probabilité diffuse.

g) Montrer que la décomposition ci-dessus est unique.