Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

TD1 : Tribus, espaces mesurés, liminf et limsup

Exercice 1. Construire un espace de probabilité associé aux expériences aléatoires suivantes.

a) On considère une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, et on tire successivement 2 boules dans cette urne au hasard.

b) On considère deux urnes, l'une contenant 3 boules numérotées de A à C, et l'autre contenant 5 boules numérotées de A à E. On choisit au hasard une urne, dans laquelle on tire au hasard une boule.

c) On lance un dé à 6 faces le nombre de fois nécessaires pour obtenir un 6, et on s'intéresse au nombre de lancers qui a été nécessaire.

Exercice 2. On note $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ l'univers de probabilité correspondant au lancer de deux dés à 6 faces.

a) On note $\mathcal{A}$ la tribu correspondant à l'observation de la parité du résultat du premier dé. Décrire la tribu $\mathcal{A}$.

b) On note $\mathcal{B}$ la tribu correspondant à l'observation du résultat du second dé. Donner une partie génératrice de $\mathcal{B}$.

c) Décrire la tribu $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$. À quelle type de connaissance sur l'expérience aléatoire correspond-t-elle ? Quelle tribu $\mathcal{C}$ peut-on ajouter pour obtenir la connaissance complète du résultat des deux dés.

Exercice 3. Soit Ω un univers de probabilité, on note $(A_1, \ldots A_n)$ une partition de Ω, c'est-à-dire une famille d'événements deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$. Quel est le cardinal de $\sigma(A_1, \ldots A_n)$?

Exercice 4. On jette successivement trois pièces de monnaie, et on s'intéresse aux côtés qu'elles montrent.

a) Construire un espace de probabilité associé à cette expérience aléatoire.

b) On considère les trois événements A : « la première pièce est tombée sur face », B : « la deuxième pièce est tombée sur face » et C : « la troisième pièce est tombée sur face ».

  i) Donner une description de l'événement $A \cup B^c$.

  ii) Écrire, grâce aux événements A, B et C et des opérations ensemblistes l'événement D : « la première et la troisième pièce montrent des côtés différents ».

  iii) Calculer la probabilité des événements $A \cup B^c$ et D.

c) Une deuxième personne arrive et observe le résultat des trois pièces de monnaie sur la table sans connaître l'ordre dans lequel elles ont été lancées.

  i) Donner la tribu $\mathcal{G}$ associée à la connaissance de cette seconde personne.

  ii) Calculer la probabilité des différents événements de cette tribu.

iii) L'événement B appartient-t-il à $\mathcal{G}$? Et $A \cup B \cup C$?

Exercice 5. [Union et intersection de tribus]

a) Montrer qu'une intersection de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.

b) Pour chaque entier n soit $\mathcal{F}_n$ la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 6. [Restriction d'une tribu] Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur E et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

Exercice 7. [Tribu image réciproque] Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ des espace mesurable. Soit $f : E \to F$ une application.

a) On définit
$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}.$$
Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu sur E. On l'appelle la tribu image réciproque de $\mathcal{F}$ par f.

b) On définit
$$\mathcal{B} := \{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\},$$
montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu.

Exercice 8. [Tribu dyadique] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mathcal{B}_n = \sigma\left(\{(k/2^n, (k+1)/2^n], 0 \leq k \leq 2^n - 1\}\right).$$

a) Décrire la tribu $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que la tribu engendrée par $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est la tribu des boréliens de l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 9. [Limsup et liminf de suites] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels, on pose
$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

a) Montrer que $\limsup_{n \to \infty} a_n$ et $\liminf_{n \to \infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, en autorisant les valeurs d'adhérence infinies.

b) Vérifier que a_n converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si
$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = \ell.$$

c) Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que
$$\limsup_{n \to \infty} \, (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \to \infty} \, a_n + \limsup_{n \to \infty} b_n.$$
A-t-on toujours $\limsup\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \limsup\limits_{n \to \infty} a_n + \limsup\limits_{n \to \infty} b_n$?