Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

TD2 : Mesure, mesurabilité et lemme de Borel-Cantelli

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et (A_n) une suite d'ensembles mesurables, montrer que $\mu\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum \mu(A_n)$.

Exercice 2. [Retour sur les tribus] Soit E un espace, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(D)$.

Exercice 3. [Limsup et liminf d'ensembles] On considère un ensemble E et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. On pose $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.

a) Décrire ces ensembles avec des mots.
b) Montrer que $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$.
c) Relier leurs fonctions indicatrices aux fonctions indicatrices des A_n.
d) Calculer $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants.
   (i) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
   (ii) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3n), 2]$.

On se donne maintenant une tribu $\mathcal{E}$ et une mesure de probabilité μ sur E, et on suppose que les A_n sont tous mesurables.

e) Montrer que $\mu\left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, et montrer par un exemple que l'inégalité peut-être stricte.
f) Montrer qu'on a aussi $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Montrer que si μ est une mesure infinie, cette inégalité peut être fausse en général.
g) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$. On appelle ce résultat le *Lemme de Borel-Cantelli.*
h) (*Une application du lemme de Borel-Cantelli*) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couple (p, q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, c'est-à-dire presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".

Exercice 4. [Tribu produit et mesurabilité]

a) Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces de probabilités, montrer que $\mathcal{E} \circledast \mathcal{F}$ est la plus petite tribu sur $E \times F$ telle que les projections π_E et π_F de $E \times F$ sur E et F respectivement sont mesurables.
b) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 5. On dit qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est symétrique si $A = -A$, où on a posé

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$, puis que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
b) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.
c) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
d) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
e) Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Soit $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, \infty[$ telle que pour tout $x > 1$, on a $\mathbf{P}(X \geq x) = x^{-\alpha}$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 7. [Lois images]

a) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$.
b) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, déterminer la loi de U^2.
c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, déterminer la loi de $\lfloor 1/U \rfloor$.
d) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer la loi de X^2.

Exercice 8.

a) Soit (X, Y) un point tiré au hasard sur le disque unité $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi marginale de X.
b) Soit (X, Y, Z) un point tiré au hasard sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la loi marginale de X.

Exercice 9. [Fonction de répartition inverse] Soit X une variable aléatoire réelle, on note F sa fonction de répartition. Pour tout $u \in (0, 1)$, on pose $F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq u\}$, qu'on appelle l'inverse généralisée continue à gauche de F.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in (0, 1)$, on a $F^{-1}(u) \leq t \iff u \leq F(t)$.
b) Montrer que si U est de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $\bar{X} = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.
c) On suppose que X est de loi exponentielle de paramètre 1, déterminer F et F^{-1} et en déduire la loi de $-\log U$.
d) On appelle loi de Cauchy une loi ayant pour densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer G tel que $G(U)$ suit une loi de Cauchy.
e) Montrer que si F est une fonction croissante continue à droite telle que

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.