Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

TD2 : Mesure, mesurabilité et lemme de Borel-Cantelli

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et (A_n) une suite d'ensembles mesurables, montrer que $\mu\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum \mu(A_n)$.

Solution de l'exercice 1. On définit $B_1 := A_1$ puis $B_{n+1} := A_{n+1} \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Alors les ensembles $(B_n)_n$ sont disjoints et l'on a

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left(\bigcup B_n\right) = \sum \mu(B_n) \leq \sum \mu(A_n) .$$

Exercice 2. [Retour sur les tribus] Soit E un espace, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(D)$.

Solution de l'exercice 2. On montre que

$$\mathcal{G} = \{ \; B \in \sigma(C) : \text{ il existe une partie dénombrable } \mathcal{D} \text{ de } \mathcal{C} \text{ vérifiant } B \in \sigma(\mathcal{D})\}$$

est une tribu en vérifiant les trois axiomes. Or $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$, d'où le résultat.

Exercice 3. [Limsup et liminf d'ensembles] On considère un ensemble E et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. On pose $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.

a) Décrire ces ensembles avec des mots.
b) Montrer que $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$.
c) Relier leurs fonctions indicatrices aux fonctions indicatrices des A_n.
d) Calculer $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants.
   (i) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
   (ii) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =] - 1 - 1/(3n), 2]$.

On se donne maintenant une tribu $\mathcal{E}$ et une mesure de probabilité μ sur E, et on suppose que les A_n sont tous mesurables.

e) Montrer que $\mu\left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, et montrer par un exemple que l'inégalité peut-être stricte.
f) Montrer qu'on a aussi $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Montrer que si μ est une mesure infinie, cette inégalité peut être fausse en général.
g) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$. On appelle ce résultat le *Lemme de Borel-Cantelli*.

h) (*Une application du lemme de Borel-Cantelli*) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couple (p,q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, c'est-à-dire presque tout x est “mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$”.

Solution de l'exercice 3.

a) Liminf : éléments qui sont dans tous les A_n à partir d'un certain rang. Limsup : éléments qui sont dans une infinité de A_n.

b) On a $\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c$.

c) On veut montrer que

$$\mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}\ , \quad \mathbb{1}_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}\ .$$

Il suffit de montrer la première identité. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}} &= \mathbb{1}_{\{(\limsup_{n\to\infty} A_n^c)^c\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n^c\}} \\ &= 1 - \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n^c} = \liminf_{n\to\infty}(1 - \mathbb{1}_{A_n^c}) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}\ .\end{aligned}$$

Prouvons à présent la première identité. Pour tout x, les deux membres de l'égalité ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1 : vérifions qu'ils prennent la valeur 1 pour les mêmes valeurs de x. On a $\mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}}(x) = 1$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n. Par ailleurs $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$ si et seulement si $\mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$ pour une infinité de n. On en déduit l'égalité.

d) Calculer $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants.
   (i) On a $\limsup_{n\to\infty} A_n = F \cup G$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = F \cap G$.
   (ii) On a $\limsup_{n\to\infty} A_n = [-1,3]$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n =]0,2]$.

e) On note que $(\bigcap_{k\geq n} A_k)_{n\geq 1}$ est une suite croissante pour l'inclusion. Ainsi

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k\geq n} A_k)\ .$$

On a alors $\mu(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \mu(A_n)$, donc $\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$. On peut prendre $A_n = [n, n+1[$ et μ la mesure de Lebesgue. La liminf est vide, mais $\mu(A_n) = 1$.

f) Si μ est une mesure finie alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mu(E) - \mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) \geq \mu(E) - \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n^c) = \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$

En revanche, si l'on prend μ la mesure de Lebesgue et $A_n = [n,\infty)$ alors la limsup est vide mais $\mu(A_n) = \infty$.

g) (*Lemme de Borel-Cantelli*) On a pour tout $n \geq 1$

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k) \ .$$

Or le membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ (par la convergence de la série).

h) On détermine la mesure de l'ensemble

$$\limsup_{q\to\infty} \left\{ x \in [0,1] : \inf_{p\in\mathbb{N}} \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}} \right\},$$

puis on conclut en utilisant l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Exercice 4. [Tribu produit et mesurabilité]

a) Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces de probabilités, montrer que $\mathcal{E} \circledast \mathcal{F}$ est la plus petite tribu sur $E \times F$ telle que les projections π_E et π_F de $E \times F$ sur E et F respectivement sont mesurables.

b) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 5. On dit qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est symétrique si $A = -A$, où on a posé

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$, puis que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

b) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

c) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

d) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

e) Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.

Solution de l'exercice 5.

a) Il est clair que $A = -A$ implique $A = A \cup (-A)$. Réciproquement, l'ensemble $A \cup (-A)$ vérifie bien $-(A \cup (-A)) = A \cup (-A)$.

b) $\emptyset \in \mathcal{A}$. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

c) Soit f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = f(x)$. On a alors $-x \in f^{-1}(\{y, -y\})$. Ainsi $|f(-x)| = |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement soit f une fonction telle que $|f(-x)| = |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{A}$, montrons que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Si $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A$ mais alors $f(-x) \in A \cup (-A) = A$ et donc $-x \in f^{-1}(A)$.

d) Soit f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ et la fonction f est paire. Réciproquement si f est paire alors pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow -x \in f^{-1}(B)$, et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

e) Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors $V^{-1}(A) = A$.

f) Notons $\mathcal{T}$ la tribu engendrée recherchée. Comme $\{a, -a\}$ est inclus dans la tribu engendrée par les singletons, $\mathcal{T}$ est incluse dans la tribu engendrée par les singletons. De même, $\mathcal{T}$ est incluse dans $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{T}$ est incluse dans l'intersection des ces deux tribus. On notera que la tribu engendrée par les singletons n'est rien d'autre que la tribu des parties dénombrables ou co-dénombrables. L'intersection des deux tribus est donc la tribu des parties dénombrables ou co-dénombrables, et symétriques. Il reste à montrer que $\mathcal{T}$ coïncide avec cette intersection. On remarque que toute partie symétrique dénombrable est une union dénombrable de $\{a, -a\}$, ce qui termine la preuve.

Exercice 6. Soit $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, \infty[$ telle que pour tout $x > 1$, on a $\mathbf{P}(X \geq x) = x^{-\alpha}$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 7. La densité de la variable X est donnée par $\alpha x^{-\alpha-1}\mathbb{1}_{\{x>1\}}$ (c'est la dérivée de la fonction de répartition $1 - x^{-\alpha}$). La variable X admet une espérance si et seulement si

$$\int_1^\infty \alpha y y^{-\alpha-1} \mathrm{d}y < \infty,$$

ce qui est le cas si et seulement si $\alpha > 1$. De même, X admet une variance si et seulement si

$$\int_1^\infty \alpha y^2 y^{-\alpha-1} \mathrm{d}y < \infty,$$

ce qui est vrai si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 8. [Lois images]

a) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$.
b) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, déterminer la loi de U^2.
c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, déterminer la loi de $\lfloor 1/U \rfloor$.
d) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer la loi de X^2.

Solution de l'exercice 8.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbf{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = k) = \mathbf{P}(k - 1 \leq X < k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1},$$

donc $\lfloor X \rfloor + 1$ est une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

b) Par simple calcul, on observe que U^2 est la loi ayant pour densité $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

c) On a

$$\mathbf{P}(\lfloor 1/U \rfloor = k) = \mathbf{P}(k \leq 1/U < k + 1) = \mathbf{P}(1/(k + 1) < U \leq 1/k) = \frac{1}{k(k + 1)}.$$

d) Soit f une fonction continue bornée, on a

$$\mathbf{E}(f(X^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} x^2 f(x^2) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/2} f(u) \mathrm{d}u.$$

Par conséquent, X^2 a la loi ayant pour densité $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u} u^{1/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est appelée loi du χ_2 de paramètre $1/2$.

Exercice 9.

a) Soit (X,Y) un point tiré au hasard sur le disque unité $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi marginale de X.

b) Soit (X,Y,Z) un point tiré au hasard sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la loi marginale de X.

Solution de l'exercice 9.

a) Pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X, Y \in D \text{ and } X \le x) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{x} \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y,$$

donc X est la loi ayant pour densité $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$.

b) De la même façon, on calcule la probabilité que $X \le x$. On observe que X suit une loi uniforme sur $[-1,1]$.

Exercice 10. [Fonction de répartition inverse] Soit X une variable aléatoire réelle, on note F sa fonction de répartition. Pour tout $u \in (0,1)$, on pose $F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \ge u\}$, qu'on appelle l'inverse généralisée continue à gauche de F.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in (0,1)$, on a $F^{-1}(u) \le t \iff u \le F(t)$.

b) Montrer que si U est de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\bar{X} = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

c) On suppose que X est de loi exponentielle de paramètre 1, déterminer F et F^{-1} et en déduire la loi de $-\log U$.

d) On appelle loi de Cauchy une loi ayant pour densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer G tel que $G(U)$ suit une loi de Cauchy.

e) Montrer que si F est une fonction croissante continue à droite telle que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,$$

alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.