Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

TD3 : Variables aléatoires et leurs lois

Exercice 1. [Début en douceur] Soit $(E, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

a) Grâce au théorème de convergence monotone, montrer que si (X_n) est une suite de variables aléatoires positives, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)$.

b) Grâce au théorème de convergence dominé, montrer que si (X_n) est une suite de variables aléatoires, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left(|X_n|\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right).$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2. [Une formule d'espérance]

a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X \geq n)$.

b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty)$, montrer que $\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

c) Plus généralement, montrer que si g est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(0) = 0$, montrer que $\mathbf{E}(g(Y)) = \int_0^\infty g'(t)\mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3. [Inégalité de Markov] Soit X une variable aléatoire positive et $a > 0$.

a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \mathbf{E}(X)/a$ pour tout $a > 0$.

b) En déduire que si $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ p.s.

c) En déduire que si $\mathbf{E}(X) < \infty$ alors $X < \infty$ p.s.

Exercice 4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 5. [Le retour de Borel-Cantelli] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $(A_n, n \geq 1)$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$.

a) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.

b) Montrer que si (A_n) est une suite de variables indépendantes avec $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$. On pourra calculer $\mathbf{P}(\cap_{j\geq n} A_j^c)$.

c) Soit $\alpha \in (0, 1]$ et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que Z_n est de loi de Bernoulli de paramètre $n^{-\alpha}$. Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1, mais que $Z_n \not\to 0$ p.s.

d) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbf{E}(|X_1|) = +\infty$.

   i) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_1| \geq n) = \infty$.

ii) En déduire que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty$.

iii) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Conclure que S_n/n diverge p.s.

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

a) On suppose que la loi de (X, Y) est $\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

b) On suppose que la loi de (X, Y) est $\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

c) On suppose que la loi de (X, Y) est $\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Exercice 7. [Lois exponentielles] Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.

b) On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Exercice 8. On définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

a) Trouver la loi de $M_n = \max_{1\leq k\leq n} U_k$.

b) Montrer que $\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbf{E}[M_n]}{p} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 9. [Formule de compensation] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

a) On suppose que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et que N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. On pose $P = \sum_{i=1}^N X_i$ et $F = N - P = \sum_{i=1}^N (1 - X_i)$.

i) Déterminer la loi du couple (P, N).

ii) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

b) On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^N f(X_i)\right) = \mathbf{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx)$, avec $\sum_{i=1}^N f(X_i) = 0$ sur $\{N = 0\}$.