Probabilités
Université Paris 8, 2021/2022

Examen de Probabilités
Le 14 décembre 2021
Durée : 2h.
Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice est interdite.

Rappels. Si $(x_n, n \geq 1)$ est une suite de réels, on note

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\ \infty} \sup_{k\geq n} x_k \text{ et } \liminf_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Si $(A_n, n \geq 1)$ est une suite d'ensembles, on note

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to\ \infty} A_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_k.$$

Exercice 1. [Questions de cours]

a) Énoncez le théorème de convergence monotone.

b) Énoncez le lemme de Fatou, puis prouvez-le à l'aide du théorème de convergence monotone.

c) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives qui converge vers X, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathbf{E}(X_n^p) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{E}(X^p) < \infty$.

Solution de l'exercice 1.

a) Soit (X_n) une suite croissante de variables aléatoires positives, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right).$$

b) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives, on a

$$\mathbf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) = \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n).$$

Posons $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$, par définition $\lim_{n\to\infty} Y_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$. De plus, on observe que (Y_n) est une suite croissante de variables aléatoires positives. Par conséquent, on a d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n),$$

par théorème de convergence monotone.
D'autre part, pour tout $k \geq n$, on a $X_k \geq Y_n$, donc $\mathbf{E}(X_k) \geq \mathbf{E}(Y_n)$ d'où $\inf_{k\geq n} \mathbf{E}(X_k) \geq \mathbf{E}(Y_n)$. On en conclut

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n).$$

c) On observe que $(X_n^p, n \geq 1)$ est une famille de variables aléatoires positives, par conséquent en appliquant le lemme de Fatou, on a

$$\mathbf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n^p) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^p) \leq M.$$

Or, puisque $X_n \to X$ quand $n \to \infty$, on a $\liminf_{n\to\infty} X_n^p = X^p$, par conséquent $\mathbf{E}(X^p) \leq M$.

Exercice 2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(X_1) = 0$, et calculer $\mathbf{V}\mathrm{ar}(X_1)$.

b) On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbf{E}(S_n) = 0$ et $\mathbf{V}\mathrm{ar}(S_n) = n/3$.

c) Soit $\lambda > 0$.

i) Montrer que $\mathbf{E}(e^{\lambda X_1}) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2\lambda}$.

ii) En déduire que $\mathbf{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) = \left(\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2\lambda}\right)^n$.

iii) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ et $\lambda > 0$, on a $\mathbf{P}(S_n \geq an) \leq \left(e^{-\lambda a}\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}\right)^n$.

iv) Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2\lambda} < e^{\lambda a}$. On pourra calculer le développement limité en 0 de $\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2\lambda}$.

v) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, p.s. pour tout n assez grand $S_n \leq n\epsilon$.

vi) Conclure que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

Solution de l'exercice 2.

a) On a $\mathbf{E}(X_1) = \int_{-1}^1 x\frac{1}{2}\mathrm{d}x = 1/4 - 1/4 = 0$, et par formule de transfert

$$\mathbf{E}(X_1^2) = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, $\mathbf{V}\mathrm{ar}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = \mathbf{E}(X_1^2) = \frac{1}{3}$.

b) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(S_n) = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n) = 0,$$

en utilisant l'identique distribution des variables aléatoires X_n.
De plus, les variables $X_1, \dots X_n$ étant indépendantes, on a

$$\mathbf{V}\mathrm{ar}(S_n) = \mathbf{V}\mathrm{ar}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}\mathrm{ar}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}\mathrm{ar}(X_n) = n \times \frac{1}{3}.$$

c) i) Par formule de transfert, on a

$$\mathbf{E}(e^{\lambda X_1}) = \int_{-1}^1 \frac{e^{\lambda x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2\lambda}.$$

ii) On obtient, par indépendance des $(X_j, j \leq n)$,

$$\mathbf{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbf{E}(e^{\lambda X_1} \times \cdots \times e^{\lambda X_n}) = \mathbf{E}(e^{\lambda X_1}) \times \cdots \times \mathbf{E}(e^{\lambda X_n}) = \mathbf{E}(e^{\lambda X_1})^n;$$

en utilisant l'identique distributions des variables $X_1, \dots X_n$, ce qui prouve le résultat.

iii) On observe que

$$\mathbf{P}(S_n \geq na) = \mathbf{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda na}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda na}} = \left(e^{-\lambda a}\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda}\right)^n.$$

iv) Par développement limité à l'ordre 2, on a

$$\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} = \frac{1 + \lambda + \lambda^2/2 - (1 - \lambda + \lambda^2/2) + o(\lambda^2)}{2\lambda} = 1 + o(\lambda),$$

et $e^{\lambda a} = 1 + \lambda a + o(\lambda^2)$. Par conséquent,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} - e^{\lambda a}}{\lambda} = -a < 0,$$

ce qui montre que pour λ assez petit, $\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} < e^{\lambda a}$.

v) Soit $\epsilon > 0$, on fixe $\lambda > 0$ tel que $\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} < e^{\lambda \epsilon}$, et on pose

$$\rho = \frac{\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda}}{e^{\lambda \epsilon}} < 1.$$

Par la question (iii), on a $\mathbf{P}(S_n \geq n\epsilon) \leq \rho^n$, donc on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \geq n\epsilon) < \infty$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que p.s., pour tout n assez grand, on a $S_n \leq n\epsilon$.

vi) La question (v) montre que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leq \epsilon$ p.s., par conséquent $\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leq 0$ p.s. En faisant le même raisonnement avec $\lambda < 0$ on obtient $\liminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \geq 0$ p.s. On en conclut que $\frac{S_n}{n}$ converge vers 0.

Exercice 3. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on a $\mathbf{P}(X_n > a) = e^{-a}$.

b) i) Soit $\epsilon > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq (1 + \epsilon) \ln n) < +\infty$.

ii) En déduire que $\limsup_{n \to \infty} X_n / \ln n \leq 1$ p.s.

c) i) Soit $\epsilon > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq (1 - \epsilon) \ln n) = +\infty$.

ii) En déduire grâce au lemme de Borel-Cantelli que $\limsup_{n \to \infty} X_n / \ln n \geq 1$ p.s.

d) On pose $Z_n = \max(X_1, \dots X_n)$.

i) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{P}(Z_n \leq a) = (1 - e^{-a})^n.$$

ii) Que vaut, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(Z_n \leq \ln n + x)$?

iii) Montrer que $\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(Z_n \leq (1-\epsilon)\ln n) < \infty$. En déduire que $\liminf_{n\to\infty}\ Z_n \geq 1$ p.s.

e) Montrer que $\lim_{n\to\infty}\ Z_n = 1$.

Solution de l'exercice 3.

a) On a $\mathbf{P}(X_n > a) = \int_a^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-a}$.

b) i) Soit $\epsilon > 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(X_n \geq (1+\epsilon)\ln n) = \sum_{n\geq 1} e^{-(1+\epsilon)\ln n} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1+\epsilon}} < +\infty,$$

car $1+\epsilon > 1$.

ii) Par théorème de Borel-Cantelli, on en déduit que p.s. pour tout n assez grand, $X_n \leq (1+\epsilon)\ln n$, ce qui montre que $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} \leq 1+\epsilon$ p.s. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, elle est également vraie pour $\epsilon = 0$, et $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} \leq 1$ p.s.

c) i) Soit $\epsilon > 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(X_n \geq (1-\epsilon)\ln n) = \sum_{n\geq 1} e^{-(1-\epsilon)\ln n} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1-\epsilon}} = +\infty,$$

car $1+\epsilon > 1$.

ii) Par théorème de Borel-Cantelli, les événements $\{X_n \geq (1-\epsilon)\ln n\}$ étant indépendants, on en déduit que p.s. il existe une infinité d'entiers n tels que $X_n \geq (1-\epsilon)\ln n$, ce qui montre que $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} \geq 1-\epsilon$ p.s. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, elle est également vraie pour $\epsilon = 0$, et $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} \geq 1$ p.s.

d) i) On a

$$\mathbf{P}(Z_n \leq a) = \mathbf{P}(\max(X_1,\ldots,X_n) \leq a) = \mathbf{P}(X_1 \leq a,\ldots,X_n \leq a) = (1-e^{-a})^n,$$

par indépendance et identique distribution des variables $X_1,\ldots X_n$.

ii) On a

$$\mathbf{P}(Z_n \leq \ln n + x) = (1-e^{-(\ln n + x)})^n = (1-\frac{e^{-x}}{n})^n \to e^{-e^{-x}},$$

quand $n\to+\infty$.

iii) On a

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(Z_n \leq (1-\epsilon)\ln n) = \sum_{n\geq 1}(1-n^{-1+\epsilon})^n \leq \sum_{n\geq 1} e^{-n^\epsilon} < +\infty,$$

par critère de Riemman. En appliquant le théorème de Borel-Cantelli, on a immédiatement $\liminf_{n\to\infty}\ Z_n \geq 1$ p.s.

e) Supposons que $\limsup_{n\to\infty}\ Z_n = \rho > 1$ p.s., il existe alors une suite n_k telle que $\lim_{k\to\infty}\ Z_{n_k} = \rho$. Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $m_k \leq n_k$ tel que $Z_{n_k} = \max(X_1,\cdots,X_{n_k}) = X_{m_k}$, par conséquent on en conclut

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{X_{m_k}}{\ln m_k} \geq \liminf_{n\to\infty}\frac{X_{m_k}}{\ln n_k} = \rho > 1,$$

ce qui est en contradiction avec la question (bii).