UNIVERSITE MONTPELLIER II **Année 2006-2007**
UFR SCIENCES

L2-MATHÉMATIQUES ULMA403 Analyse3
Feuille d'exercices N°3

Calcul de sommes de certaines séries numériques.
Quand l'on peut trouver une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0, \cdots, p-1\} \to \mathbb{K}$ telle que pour tout entier $n \geq p$ on ait $u_n = f(n+1) - f(n)$, alors on a $S_n := \sum\limits_{k=p}^{n} u_k = f(n+1) - f(p)$ (**le vérifier**). Ainsi on peut directement vérifier à l'aide de la fonction f si la série numérique $\sum u_n$ converge et on peut calculer dans ce cas la somme de la série numérique si elle converge.

Exercice 1. I) Soit pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ un nombre $u_n \in \mathbb{K}$.
1) Quelle différence faites-vous entre **suite** numérique de terme général u_n et **série** numérique de terme général u_n ?
2) Quelle différence faites-vous entre les deux écritures $(u_n)_n$ et $\sum u_n$?
3) On suppose que la série numérique $\sum u_n$ converge.
a) Quelle différence faites-vous entre les notations $\sum u_n$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$?
b) Rappeler la définition du reste d'ordre n (noté R_n) de la série numérique $\sum u_n$.
II) On suppose que $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \left(\frac{-2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que la série numérique $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
2) Déterminer le reste d'ordre n de la série numérique.

Exercice 2. I) Soient a et b deux paramètres réels. Étudier la nature et la somme éventuelle des séries numériques de terme général :

$$a^{n+1} + \tfrac{1}{2^n}\ ;\ \sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+3} - 3\sqrt{n+4}\ ;\ \tfrac{1}{n(n+1)}\ ;\ ln(n) + a\,ln(n+1) + b\,ln(n+2).$$

II) Pour $u_n := \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ montrer que la série numérique $\sum u_n$ converge, calculer sa somme et donner un équivalent du reste R_n d'ordre n (on rapelle que $R_n : \sum_{k=n}^{\infty} u_k$).

Exercice 3.1) Montrer qu'il existe une fonction polynomiale f (que l'on déterminera) de degré 4 (et à coefficients indépendants de k) telle que pour tout entier k on ait $k^3 = f(k+1) - f(k)$.
2) Vérifier que $A_n := \sum_{k=0}^{n} k^3$ vaut $(1 + 2 + + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3) Montrer que la série numérique de terme général $u_n := \frac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercices généraux sur la nature d'une série numérique

Exercice 1. Soient $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pour tout entier } n \geq N.$$

Montrer que la convergence de la série numérique $\sum v_n$ entraine celle de la série numérique $\sum u_n$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **décroissante** telle que la série numérique $\sum u_n$ **converge**.
Soit $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} v_k = -nu_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k$.
2) En déduire que la série numérique $\sum v_n$ converge.

3) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est nulle.
4)Exprimer $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ en fonction de $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Exercice 3. Soit a un paramètre réel. Étudier la nature des séries numériques de terme général :

$$\text{ch}\, n\,;\; n(2+\cos n)\,;\; \ln(1+\sqrt{n});\; \frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{n});\; \ln(1+\frac{1}{n^a});\; \frac{\ln n}{n};$$

$$\frac{1}{n^2\ln n};\; n^{\frac{1}{n}}-n;\; 1-\cos(\frac{1}{n});\; e^a-(1+\frac{a}{n})^n;\; \sqrt{n^2+1}-n;\; \frac{1}{\ln(\text{ch}\, n)};$$

$$\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an};\; (1-\frac{1}{n})^{n^2};\; \frac{n+sin\, n}{n^2-\ln n};\; \frac{\sin n}{n^2+\cos^2 n};$$

$$\text{Arccos}(1-\frac{1}{n^3});\; (\frac{n+1}{n-2})^n-a(1+\frac{3}{2n});\; (\frac{n^2+1}{n^2+n+1})^{n^2};\; (\frac{n+4}{2n+1})^{n\ln n}.$$

Exercice 4. 1) Soit une série numérique convergente à termes positifs $\sum u_n$ et soit un réel constant $\alpha > 1$. Montrer que la série numérique $\sum u_n^{\alpha}$ converge.
2) Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ soient deux **réels** u_n et v_n. Montrer que si les séries numériques $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent alors la série numérique $\sum u_n v_n$ converge.
A-t-on un résultat analogue pour u_n et v_n complexes ?

Exercice 5. Soit a un paramètre réel. Étudier la nature des séries numériques de terme général :

$$\frac{n^a}{n!};\; (\frac{n+1}{n+2})^{n^2};\; \frac{|a|^n}{n!};\; \frac{2^n+sin\, n}{|a|^n+n};\; (-1+\frac{\ln(n+2)}{\ln n})^a;\; \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n};\; e^{-\sqrt{n^3+n^2}};$$

$$\frac{n^a}{|a|^n};\; \frac{n^2+a^n}{n!}\text{ avec a>0};\; (\ln n)^{-\sqrt{n}};\; \frac{2^n+\sin n}{|a|^n+n};\; \ln(\frac{\text{ch}\,\frac{a}{n}}{\cos\frac{a}{n}});\; (\cos\frac{1}{n})^{n^a}.$$

Exercice 6. Répondre avec justification aux questions suivantes.
1) Soit $u_n \in \mathbb{K}$ avec $u_n \to 0$. Est-il correct de conclure que la série numérique $\sum u_n$ est convergente ?
2) Soit $u_n \geq 0$ avec $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Peut-on dire que la série numérique $\sum u_n$ converge ?
3) Soit $u_n \in \mathbb{R}$ avec $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$. Sachant que la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (**dire pouquoi**), peut-on dire que la série numérique $\sum u_n$ converge ?
4) Soit $u_n \in \mathbb{R}$ avec $u_n \leq \frac{(-1)^n}{n}$. Sachant que la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente , peut-on dire que la série numérique $\sum u_n$ converge ?
5) Pour appliquer la règle d'Abel à la série numérique $\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, est-il correct d'écrire : Comme il existe un réel M indépendant de n tel que l'on ait $\sum_{k=1}^{n} |sin| \leq M$ et comme la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ est décroissante, la série numérique $\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ est convergente d'après la règle d'Abel.

Exercice 7.Soit a un paramètre réel. Étudier la nature des séries numériques de terme général :

$$\frac{1}{(\ln n)^n};\; \frac{(-1)^n}{n^a};\; (1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n\sqrt{n}};\; \frac{\sin n}{n^a};\; \ln(\frac{(-1)^n}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}});$$

$$-1+\exp(\frac{\sin n}{n^a});\; \sin \pi\sqrt{n^2+a};\; \ln(1+\sin^2\pi\sqrt{n^2+1}).$$