# Calcul Différentiel[1]

Corrigé du contrôle terminal du 21 mai 2008

durée : 2 heures

*Nota bene.* Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

## 1. Question de cours (2 pts)

Démontrer le théorème suivant qui donne le lien entre les dérivées directionnelles et la différentielle d'une fonction. $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés et $\Omega$ est un ouvert non vide de $E$.

**Théorème 1.** *Soit $v \in E$ et $f : \Omega \subset E \to F$. Si $f$ est différentiable en $a \in \Omega$ alors la dérivée de $f$ suivant $v$ en $a$, $D_v f(a)$, existe et*

$$D_v f(a) = df(a)(v). \tag{E1}$$

*Réponse* :

`Puisque` $f$ `est différentiable en` $a$`, il existe une fonction reste` $r : h \in E \to r(h) \in F$ `telle` $\lim_{h\to 0} \|r(h)\|_E / \|h\|_F = 0$ `et, pour` $h$ `dans un voisinage de` $0$`,`

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + r(h).$$

`Appliquant cette relation avec` $h = tv$`,` $t$ `dans un voisinage de` $0$ `dans` $\mathbb{R}$`, on obtient`

$$\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = \frac{1}{t}df(tv) + r(tv)/t = df(v) + r(tv)/t.$$

`Or`

$$\|r(tv)/t\|_F = \|r(tv)\|_F / \|tv\|_E \cdot \|v\|_E \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot \|v\| = 0,$$

`ce qui entraîne avec l'expression précédente`

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = df(v)$$

`donc la dérivée suivant le vecteur` $v$ `existe et vaut` $df(a)(v)$`.`

**Barème : 2 points.**

## 2. Question de cours (6 pts)

Démontrer le théorème suivant lorsque $I = [a,b]$ et $t_0 = a$ en utilisant le théorème du point fixe.

**Théorème 2** (de Cauchy-Lipschitz). *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \to F$, et $y_0 \in F$. Si $f$ est continue sur $I \times E$ et s'il existe $L \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant*

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_F \le L\,\|y - z\|_E, \quad t \in I,\, y, z \in E \tag{E2}$$

*alors l'équation différentielle*

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right. \tag{E3}$$

*admet une et une seule solution sur $I$.*

1. Licence MAPI (3-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2007-2008

*Réponse :*
L'équation $y'(t) = f(t,y(t)$ avec $y(t_0) = y_0$ est équivalente à l'équation intégrale
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds, \quad y \in \mathbf{C}(I,\mathbb{R}).$$
On doit donc résoudre l'équation
$$\Phi(y) = y$$
avec
$$\Phi : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow E \\ y & \longrightarrow \Phi(y) : t \in I \to y_0 + \int_{y_0}^{t} f(s,y(s))ds \end{array},$$
et $E = \mathbf{C}(I,\mathbb{R})$ qui est muni de la norme *sup* sur $I$. D'après le théorème du point fixe généralisé, il suffit démontrer qu'une des itérées de l'application $\Phi$ est contractante, autrement dit qu'il existe $s \in \mathbb{N}^\star$ et $k < 1$ tels que
$$\|\Phi^{(s)}(y_1) - \Phi^{(s)}(y_2)\|_E \leq k\|y_1 - y_2\|_E.$$
Soient donc $y_1$ et $y_2$ dans $I$. On a en utilisant l'hypothèse que $f$ est Lipschitz,
$$\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t) = \int_{y_0}^{t} [f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))]ds$$
$$\Longrightarrow |\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)| = (t - t_0) \cdot L \cdot \|y_1 - y_2\|, \quad t \in I.$$
Ensuite, en utilisant cette inégalité, pour estimer $\Phi^{(2)} = \Phi \circ \Phi$,
$$\Phi^{(2)}(y_1)(t) - \Phi^{(2)}(y_2)(t) = \int_{y_0}^{t} [f(s,\Phi(y_1)(s)) - f(s,\Phi(y_2)(s))]ds$$
$$\Longrightarrow |\Phi^{(2)}(y_1)(t) - \Phi^{(2)}(y_2)(t)| = \int_{y_0}^{t} L \cdot (s - t_0) \cdot \|y_1 - y_2\|_E ds \leq \frac{(t - t_0)^2}{2} \cdot L^2 \cdot \|y_1 - y_2\|, \quad t \in I.$$
En continuant de cette manière, on arrive a
$$|\Phi^{(s)}(y_1)(t) - \Phi^{(s)}(y_2)(t)| \leq \frac{(t - t_0)^s}{s!} \cdot L^s \cdot \|y_1 - y_2\|_E.$$
En prenant la borne supérieure sur $I = [a,b]$ avec $a = t_0$, il vient
$$\|\Phi^{(s)}(y_1) - \Phi^{(s)}(y_2)\|_E \leq \frac{(b - a)^s}{s!} \cdot L^s \cdot \|y_1 - y_2\|_E.$$
Comme la suite $s \to \frac{(b-a)^s}{s!}L^s$ tend vers $0$ lorsque $s \to \infty$, il existe $s$ telle que la constante $K = \frac{(b-a)^s}{s!}L^s$ soit strictement plus petite que $1$. Pour cette valeur de $s$, $\phi^{(s)}$ est contractante et la démonstration du théorème est achevée.

**Barème : 6 points.**

1. **(1) 2,5 points pour une bonne transformation en équation intégrale avec mention du théorème du point fixe;**
2. **(2) 2,5 points pour les estimations (ne pas exiger davantage de détails que ceux donnés ici);**
3. **(3) 1 pt pour rédaction et clarté.**

## 3. Exercice (3 pts)

On note par $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On définit $F$ sur $\mathbb{R}^n$ par la relation $F(x) = f(\langle \lambda, x\rangle)$. Montrer que $F$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et calculer une expression de sa différentielle en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en fonction de $f$ et de $\lambda$. Le fonction $F$ peut-elle admettre un extremum local strict en un point $x_0$ de $\mathbb{R}^n$ ?

*Réponse* :

1) La fonction $F$ est la composée de deux application différentiables: l'application $f$ différentiable en tout point de $\mathbb{R}$ et l'application linéaire $L : x \to \langle \lambda, x\rangle$ différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème des fonctions composées, $F$ est donc différentiable en tout point $x_0$ de $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\begin{aligned} dF(x_0)(h) &= (df(L(x_0)) \circ dL(x_0))(h) \\ &= df(\langle \lambda, x_0\rangle)(L(h)) = f'(\langle \lambda, x_0\rangle) \cdot \langle \lambda, h\rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{E4}$$

où on a utilisé que $df(u)(H) = f'(u) \cdot H$ et $dL(x_0) = L$.

2) Une telle fonction ne peut pas admettre un extremum local strict. Supposons par exemple que $F$ admette un maximum relatif strict en $a \in \mathbb{R}^n$, de sorte qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x) < f(a)$ pour tout $x$ différent de $a$ dans la boule ouverte $B(a,\epsilon)$. Nous montrons que cette supposition conduit à une contradiction. Prenons $w$ un vecteur non nul unitaire orthogonal à $\lambda$ de sorte que $\langle \lambda,w\rangle = 0$ puis $x = a + \epsilon/2 \cdot w$. On a $x \neq a$ et $x \in B(a,\epsilon)$ car $\|x - a\| = \|\epsilon/2 \cdot w\| = \epsilon/2\|w\| = \epsilon/2 < \epsilon$. D'autre part, en remarquant que

$$\langle \lambda,a + \epsilon/2 \cdot w\rangle = \langle \lambda,a\rangle + \epsilon/2\langle \lambda,w\rangle = \langle \lambda,a\rangle,$$

nous avons

$$F(x) = f(\langle \lambda,a + \epsilon/2 \cdot w\rangle) = f(\langle \lambda,a\rangle) = F(a),$$

ce qui contredit le fait que $f$ ait un maximum strict en $a$. Le cas d'un nminimum se traite de la même manière.

**Barème :**

(1) **2 points pour le 1.**
(2) **2 pts pour le 2) (il y a un point de bonus), on peut ici mettre jusqu'à 1 point pour une bonne idée non aboutie.**

## 4. Exercice (4 points)

Déterminer la plus grande valeur que peut prendre la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xyz$ sur le sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On précisera en quel(s) point(s) le maximum est atteint. Établir un résultat similaire sur la sphère de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

*Réponse* :

1) Le thèorème du cours sur les extrémums liés s'applique de sorte que le maximum sera atteint en un point $X = (x,y,z)$ de la sphère en lequel $df(X)$ et $dg(X)$ sont colinéaires où $f(X) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $g(X) = xyz$. Cela signifie qu'il existe un réel $\lambda$ tel que

$$\partial_1 g(X) = \lambda \partial_1 f(X),\ \partial_2 g(X) = \lambda \partial_2 f(X) \text{ et } \partial_3 g(X) = \lambda \partial_3 f(X).$$

Le calcul des dérivées partielles conduit donc au système

$$\begin{cases} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xyz &= 2\lambda x^2 \\ yxz &= 2\lambda y^2 \\ zxy &= 2\lambda z^2 \end{cases}.$$

Il suit que $\lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2$. Alors ou bien $\lambda = 0$ ou bien $x^2 = y^2 = z^2$. La première possibilité est à écarter car deux des trois nombres seraient nuls en sorte $xyz = 0$ ce qui ne peut donner lieu à un maximum. Dans la seconde hypothèse, puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, il vient $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$, ou encore $|x| = |y| = |z| = 1/\sqrt{3}$ de sorte les nombres $x,y$ et $z$ valent tous $\pm 1/\sqrt{3}$. Une analyse de ces cas montre que la plus grande valeur est obtenue lorsque deux des trois nombres sont négatifs ou les trois positifs et le maximum est $(1/\sqrt{3})^3$.
2) Une méthode en tous points similaire montrerait que le maximum de la fonction $x_1 x_2 \cdots x_n$ sur la sphère d'équation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ est atteint en des points de valeurs absolues toutes égales et vaut $(1/\sqrt{n})^n$.

**Barème :**

(1) **3 points pour le 1) dont 1,5 points pour le système des conditions et 1,5 points pour sa "résolution" et la détermination du max).**
(2) **1 point pour le 2), mettre jusqu'à 1 point de bonus si des étudiants ont détaillé cette seconde partie.**

## 5. Exercice (5 points)

Soit $E$ un espace de Banach, $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et $L : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. On considère l'application $f$ définie sur $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - L(x).$$

**5.1.** Démontrer, en détaillant le raisonnement et le calcul, que si $f$ admet un extremum local en $a \in E$ alors

$$\forall h \in E \quad B(a,h) = L(h). \tag{E5}$$

*Réponse* :
D'après le cours, si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $df(a) = 0$ où encore $df(a)(h) = 0$ pour tout $h \in E$. Remarquons que $f = 1/2 \cdot G - L$ avec $G : x \to B(x,x)$. Comme $G$ est une forme quadratique, on a $dG(a)(h) = 2B(a,h)$ (voir cours). D'autre part $dL(a)(h) = L(h)$ donc la condition $df(a) = 0$ se traduit par $1/2 \cdot dG(a) - dL(a) = 0$ soit $1/2 \cdot dG(a)(h) - dL(a)(h) = 0$ pour tout $h \in E$ ou encore $B(a,h) - L(h) = 0$ pour tout $h \in E$ qui n'est autre que la condition demandée.

**Barème : 2 points.**

**5.2.** On suppose maintenant que la forme bilinéaire $B$ est positive. Cela signifie que $B(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$. On suppose en outre que *la condition (E5) est satisfaite.*

(1) Montrer, à partir de la relation $B(a-h, a-h) \geq 0$, que

$$\forall h \in E \quad -B(a,a) \leq B(h,h) - 2L(h).$$

*Réponse :*

On a pour tout $h \in E$

$$\begin{aligned} B(a-h,a-h) &\geq 0 \\ B(a,a) - 2B(a,h) + B(h,h) &\geq 0 \quad \texttt{(utilise } B \texttt{ forme bilinéaire symétrique)} \\ B(h,h) - 2L(h) &\geq -B(a,a) \quad \texttt{(utilise } B(a,h) = L(h)\texttt{).} \end{aligned}$$

**Barème : 1,5 points.**

(2) Montrer que $f$ admet un minimum global en $a$, c'est-à-dire $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$.

*Réponse :*

Nous devons montrer que $f(h) \geq f(a)$ pour tout $h \in E$. Cela provient par exemple de l'inégalité $B(h,h) - 2L(h) \geq -B(a,a)$ car $B(h,h) - 2L(h) = 2f(h)$ et, grâce à l'hypothèse (E5),
$2f(a) = B(a,a) - 2L(a) = B(a,a) - 2B(a,a) = -B(a,a)$.

**Barème : 1,5 points.**