

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Attention : Ceci est un résumé succinct du cours. Il ne remplace pas.

Dans toute la suite \mathbb{K} désigne un corps (on pourra prendre \mathbb{R} ou \mathbb{C} mais les matheux doivent avoir en tête que ça peut être n'importe quel corps).

1 Notion d'espace vectoriel

1.1 Définition

De façon vague, un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble d'éléments appelés *vecteurs*, tels que :

- on peut les additionner/soustraires entre eux.
- on peut multiplier les vecteurs par des éléments de \mathbb{K} appelés *scalaires*.
- ces deux opérations sont liées par quelques relations de compatibilités. (par contre on ne multiplie pas les vecteurs entre eux)

La définition rigoureuse nécessite plusieurs axiomes formels (vus en cours, je ne les réécris pas ici car ils sont rarement utilisés).

Exemples : (sous entendu, les lois d'additions et de multiplication par un scalaire sont les lois habituelles)

- \mathbb{K}^n , l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes.
- Pour A un ensemble quelconque et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(A, E)$ des applications de A dans E . Cas particuliers :
 - pour un intervalle I , les fonctions de I dans \mathbb{R} forment un \mathbb{R} -ev.
 - les suites de \mathbb{K} forment un \mathbb{K} -ev (prendre $A = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$).
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

1.2 Sous espace vectoriel

1.2.1 Définition

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de lois “+” et “.” Un sous espace vectoriel (sev) de E est un sous ensemble de E qui est un \mathbb{K} espace vectoriel pour les lois “+” et “.” de E .

Proposition 1.1. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :

1. F est non vide,
2. $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.u + \mu.v \in F$.

En général pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on prouve que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (ceci évite de devoir vérifier les axiomes d'espace vectoriel).

Remarque 1.2. Soit F sev de E , alors $0_E \in F$.

1.2.2 Exemples

- a) $\{0\}$ et E sont des sev de E .
- b) Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Alors l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonction continues de I dans \mathbb{R} est un espace vectoriel (pour les loi "+" et "." usuelles). En effet c'est un *sous espace vectoriel* de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- c) Soit $E = \mathbb{K}^n$. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E .

Les sous parties qui suivent donnent d'autres exemples qui sont très important pour la suite. Dans toute la suite, E designe un \mathbb{K} espace vectoriel.

1.2.3 Sous espace vectoriel engendré

Soient $v_1, \dots, v_p \in E$. Une *combinaison linéaire* de v_1, \dots, v_p est un élément de E de la forme $\sum_{i=1}^p \lambda_i.v_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

On défini le sous espace vectoriel (de E) *engendré* par (v_1, \dots, v_p) :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) &= \left\{ \sum_i \lambda_i.v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right. \\ &= \left. \{ \text{Combinaisons linéaires de } (v_1, \dots, v_p) \} \right\} \end{aligned}$$

Cas particulier : $p=1$ ou 2 . Droite vectorielle, plan vectoriel.

1.2.4 Intersection

Proposition 1.3. *L'intersection de deux sous espace vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E .*

Application : l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaire homogène (à n inconnues) est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

Attention : en général, la réunion de deux sous espaces vectoriels n'est pas un (cf exo td). Le complémentaire d'un sev dans E n'est jamais un sev.

1.2.5 Somme de sous espace vectoriels

Soient F_1, F_2 des sev de E . On définit :

$$F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2\}$$

Proposition 1.4. Si $F_1 = \text{Vect}((e_1, \dots, e_p))$ et $F_2 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_r)$ alors $F_1 + F_2 = \text{Vect}((e_1, \dots, e_r))$.

Attention :

- $F_1 - F_2$ ne veut rien dire.
- $F_1 + F_2$ n'est en général pas égal à $F_1 \cup F_2$ (le premier est toujours un sev, le deuxième rarement). Par contre on peut montrer que $F_1 + F_2$ est le "plus petit" sev qui contient $F_1 \cup F_2$.

2 Familles libres, génératrices, bases

2.1 Familles libres et génératrices

Definition 2.1. Une famille de vecteurs (u_1, \dots, u_p) est *génératrice* de E si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$ (c'est à dire si tout élément de E est combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p)).

Vocabulaire : un espace vectoriel est dit *finiment engendré* s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 2.2. Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice est génératrice

Attention : Il peut avoir a priori plusieurs manière d'écrire un élément en fonction de (u_1, \dots, u_p) .

Definition 2.3. Une famille (u_1, \dots, u_p) est libre si :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

Attention On a *toujours* $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0$ si $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Être libre signifie qu'il n'y a pas d'autre manière de produire 0 comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p) .

Proposition 2.4. (u_1, \dots, u_p) est libre ssi tout élément de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p) .

Proposition 2.5. Toute sous famille d'une famille libre est libre.

2.2 Bases

Definition 2.6. Une base de E est une famille libre et génératrice de E .

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Alors pour tout élément u de E il existe un *unique* n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que : $u = \sum_i \lambda_i e_i$. Ce n -uplet est appelé *coordonnées de u dans la base \mathcal{B}* et est habituellement écrit comme vecteur-colonne (pour des raisons qui seront claires par la suite).

Le point essentiel est de justifier de l'existence de bases. C'est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.7 (Théorème de la base incomplète). *Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel finiment engendré, $G = (g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E , $U = (u_1, \dots, u_r)$ une famille libre ($n \geq 1, r \geq 0$). Alors on peut obtenir une base de E en ajoutant à U des éléments de G .*

On en déduit le résultat pratique suivant :

Corollaire 2.8. *Dans un espace vectoriel E finiment engendré.*

- *de toute famille génératrice de E , on peut extraire une base.*
- *toute famille libre peut être complétée en une base.*

2.3 Dimension

Théorème 2.9. *Soit E un espace vectoriel finiment engendré. Alors toutes les bases de E ont même nombre d'élément.*

Attention ! [pour les matheux] Ce théorème semble évident mais ne l'est pas. Il est essentiel si on veut pouvoir définir la dimension.

Definition 2.10. La dimension de E est le nombre d'éléments de ses bases, on la note $\dim(E)$ (on dira dorénavant d'un ev finiment engendré est de *dimension finie*)

Une conséquence de ce théorème ainsi que le théorème de la base incomplète permet les critères pratiques suivant :

Corollaire 2.11. Dans un espace vectoriel de dimension n :

- toute famille libre admet **au maximum** n éléments.
- toute famille génératrice admet **au minimum** n éléments.
- toute famille libre avec **exactement** n éléments est une base.
- toute famille génératrice avec **exactement** n éléments est une base

Attention une famille avec moins de n éléments n'est pas forcément libre, une famille avec plus de n éléments n'est pas forcément génératrice.

Proposition 2.12. Soit E de dimension finie alors pour F sev de E on a :

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$,
- Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$

Definition 2.13 (Rang d'une famille de vecteurs). Soient $u_1, \dots, u_p \in E$, on appelle *rang* de u_1, \dots, u_p la dimension de l'espace vectoriel engendré

$$rg(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$$

On a :

Proposition 2.14. — $rg(u_1, \dots, u_p) = \dim(E) \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E

- $rg(u_1, \dots, u_p) \leq p$ avec égalité ssi (u_1, \dots, u_p) est libre.

Dans \mathbb{K}^n le calcul du rang d'une famille de vecteurs se fait par échelonnement.

2.4 Quelques dimensions à connaître

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ (ev des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

Théoreme 2.15. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène et échelonné est de dimension $n - k$, où k est le nombre d'équations (réduites) et n le nombre d'inconnues.*

Proposition 2.16. *Si F, G sont des sev de E , alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

3 Somme directe et supplémentaires

Cas de deux sous espaces Soient F, G des sous espaces vectoriels de E . On rappelle que par définition, les éléments de $F + G$ sont les éléments de la forme $f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Attention, en général il n'y a pas forcément unicité du couple (f, g) . Le cas où (f, g) est unique s'appelle la somme directe. Plus précisément :

Definition 3.1. On dit que F et G sont en somme directe si $\forall u \in F + G$, $\exists!(f, g) \in F \times G$, $u = f + g$.

Notation Dans ce cas on note $F \oplus G$. Attention, cette notation désigne à la fois le sous espace vectoriel $F + G$ et l'information comme quoi F, G sont en somme directe.

Proposition 3.2. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) F, G sont en somme directe,
- b) L'écriture de 0 en sous forme $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ est unique (et c'est $0 + 0 \dots$),
- c) $F \cap G = \{0\}$,
- d) (en dimension finie uniquement¹) en réunissant une base de F et une base de G , on obtient une base de $F + G$,
- e) (en dimension finie uniquement²) $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Definition 3.3. F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$

1. Pour les matheux : bon en fait ça c'est aussi vrai en dimension infinie, si on admet le résultat qui affirme que tout ev admet une base, la preuve de ce résultat utilise l'axiome du choix, donc tout le monde n'est pas d'accord, mais c'est une autre histoire...

2. Ça c'est réellement de la dimension finie !

Car de plusieurs sous espaces Soient F_1, \dots, F_k des sous espaces vectoriels. On peut définir sans difficulté $F_1 + \dots + F_k$. Ces sous espaces sont en somme directe si l'écriture sous forme de somme d'éléments dans F_1, \dots, F_k est unique. On note $\bigoplus_{i=1}^k F_i$. La proposition suivante se prouve de façon analogue à la précédente :

Proposition 3.4. a) F_1, \dots, F_k sont en somme directe,
b) L'écriture de 0 en sous forme $f_1 + \dots + f_k$ avec $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ etc... est unique (et c'est $0 + \dots + 0$),
d) (en dimension finie uniquement) en réunissant une base de F_1 , une base de F_2, \dots , et une base de F_k , on obtient une base de $F_1 + \dots + F_k$,
e) (en dimension finie uniquement) $\dim(F_1 + \dots + F_k) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_k)$.

Attention : je n'ai pas mis le point c) car il est problématique. On peut tout à fait avoir pour tout $i \neq j$ $F_i \cap F_j = \{0\}$ mais F_1, \dots, F_k pas en somme directe !