Université Paul Sabatier 2011–2012

Master 1 Ingénierie Mathématique

Examen d'Optimisation, durée 2h

Exercice 1. (4 points) Résoudre le problème de maximiser la fonction $f(x,y) = y^2 - 2x - x^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 \leq 1$ (on pourra utiliser la méthode des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker). Résoudre également le problème de minimisation de f sous la même contrainte.

Exercice 2. (6 points) On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}Y_{ij}$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On note également $\|\cdot\|$ la norme euclidienne d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On pourra se rappeler que pour u, $v \in \mathbb{R}^n$, $uv^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de terme général $[uv^T]_{ij} = u_i v_j$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et soit $\Omega = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : Xd = y\}$. Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on introduit les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, définies par $f(X) = \frac{\|X-A\|^2}{2}$ et $g(X) = Xd - y$.

1. Dire pourquoi le problème de minimiser f sous la contrainte $g(X) = 0$ possède une solution unique.

2. On pose $g = (g_1, \cdots, g_n)$. Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [1, \cdots, n]$, on a $\sum_{j=1}^n H_{ij}d_j = \langle\langle e_i d^T, H\rangle\rangle$ où e_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [1, \cdots, n]$, on a $\nabla g_i(X) = e_i d^T$.

3. Soit X vérifiant $g(X) = 0$ l'unique solution du problème. Montrer qu'il existe $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$ tels que $X - A = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j d^T$. En déduire que $X = A + \lambda d^T$ et déterminer λ.

Exercice 3. (4 points) On se propose de minimiser dans $\mathbb{R}^3$ la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ sous les contrainte $h_1(x,y,z) = 0$ et $h_2(x,y,z) = 0$ avec

$$h_1(x,y,z) = z \text{ et } h_2(x,y,z) = z^2 - (y-1)^3.$$

Dessiner l'ensemble des contraintes et trouver la solution (x,y,z) de ce problème. Existe-t-il des réels λ_1 et λ_2 tels que $\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla h_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h_2(x,y,z)$? Quelle hypothèse du Théorème de Lagrange n'est-elle pas vérifiée ?

Exercice 4. (6 points) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n symétrique et définie positive à coefficients réels, et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \dfrac{x^T A x}{2} - b^T x$.

1. Quel est le gradient $\nabla f(x)$ de la fonction f au point $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction f est-elle deux fois différentiable ? (si oui quelle est sa matrice Hessienne $H(x)$ en x), coercive ? convexe ?

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tels que $d^T \nabla f(x) < 0$, on pose, pour $t > 0$, $q(t) = f(x + td)$, calculer $q'(t)$ et déterminer la solution $t^* > 0$ du problème $\min_{t>0} q(t)$.

3. Décrire pour la fonction f la méthode du gradient à pas fixe et celle du gradient à pas optimal.

4. On suppose toujours que $d^T \nabla f(x) < 0$. Soient $0 < \alpha < \beta < 1$. Déterminer $\underline{t} > 0$ et $\bar{t} > 0$ tels que

$$\begin{cases} q(t) \leq q(0) + t\alpha q'(0) & \text{pour tout } 0 < t \leq \bar{t}, \\ \\ q'(t) \geq \beta q'(0) & \text{pour pour tout } t > \underline{t}. \end{cases}$$

   Montrer que $\underline{t} < \bar{t}$ et en déduire les valeurs de t satisfaisant les conditions de Wolfe au point x dans le direction d (on pourra observer que $\beta - 1 > \alpha - 1 > -2 + 2\alpha$). La valeur de t trouvée pour la méthode du gradient à pas optimal vérifie-t-elle cette condition ?